

PAULO YOUNG CHI

OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE ATIVOS DE CRÉDITO

SÃO PAULO

2008

PAULO YOUNG CHI

OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE ATIVOS DE CRÉDITO

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

SÃO PAULO

2008

PAULO YOUNG CHI

OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE ATIVOS DE CRÉDITO

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

Orientadora:
Prof^a Dra Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO

2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Chi, Paulo Young
Otimização de portfólios de ativos de crédito/ P.Y. Chi. -- São Paulo, 2008.
p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Investimentos(Otimização) 2.Título de crédito 3.Crédito rural I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

AGRADECIMENTOS

A todos que me apoiaram e acreditaram em mim ao longo deste último ano.

RESUMO

Este trabalho estuda o problema de composição de portfólios compostos por ativos de crédito. Estes ativos comprovadamente apresentam comportamento diferente dos demais ativos de investimento, notadamente em termos das distribuições de probabilidade de seus retornos. Para a mensuração das perdas estimadas foram utilizadas medidas de risco comuns na indústria, porém para contornar o problema da escassez de dados sobre os ativos de crédito, foram gerados cenários através da Simulação de Monte Carlo utilizando funções de cópula. Foi possível observar que a minimização do CVaR é mais eficaz que a minimização da variância para redução do risco de perda dos portfólios compostos por ativos de crédito. Por final foi feita uma aplicação do modelo desenvolvido ao caso brasileiro onde o portfólio era composto por ativos de crédito do agronegócio.

ABSTRACT

This Project analyses the credit assets portfolios composition problem. These assets presents a different behaviour in comparison with regular investment assets. To measure the estimated loses from these assets it was used risk measures commonly used on the industry, however to overwhelm the problem of data scarcity on credit assets, scenarios were generated by the use of Monte Carlos Simulation using copula functions. It was also possible to observe that the CVaR minimization is more efficient than the variance minimization to reduce the credit assets porfolios losses risk. It was made an final application of the developed model to the Brazilian case where the portfolio was composed of agricultural credit assets.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	19
1.1. O agronegócio brasileiro	19
1.2. O problema	21
1.3. Objetivo do trabalho	21
1.4. O programa de estágio.....	22
2. Conceitos gerais.....	23
2.1. Operações de crédito	23
2.2. Risco e spread de crédito.....	25
2.3. Títulos de crédito.....	27
2.4. Títulos do agronegócio.....	30
2.5. Rating	33
2.6. Teoria moderna de portfólios	35
2.6.1. Modelo de média-variância.....	35
2.6.2. Fronteira eficiente.....	36
3. Conceitos para geração de cenários	39
3.1. Cópulas.....	39
3.1.1. Definição	40
3.1.2. Teorema de Sklar.....	40
3.1.3. Cópula t de Student	41
3.2. Tempo até o <i>default</i>	41
3.2.1. <i>Hazard rate</i>	42
3.3. Simulação de Monte Carlo	47
4. Conceitos de medidas de risco.....	51
4.1. Variância.....	51
4.2. VaR – Value at Risk.....	52
4.3. CVaR – Conditional Value at Risk	55
5. Formulação matemática	57
5.1. Modelo de Markowitz modificado	57
5.2. Modelo CVaR.....	59

6. Validação do modelo.....	63
6.1. Geração de cenários	63
6.2. Comparação dos modelos de otimização	68
6.3. Análise de sensibilidade.....	73
7. Portfólio de títulos do agronegócio.....	81
8. Conclusões	87
8.1. Recomendações para trabalhos futuros.....	89
9. Referências bibliográficas	91
ANEXO A – Estimação dos parâmetros da cópula.....	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Crédito Privado e Crédito Público ao setor rural	20
Figura 2 - Desenho esquemático de uma operação de crédito	23
Figura 3 - Comportamento de um ativo de crédito	29
Figura 4 - Processo de emissão de rating	34
Figura 5 - Fronteira eficiente	37
Figura 6 - Gráfico $F(t)$ X $S(t)$	45
Figura 7 - Gráfico com diferentes Hazard Rates	45
Figura 8- VaR de um ativo dado um nível de confiança X%	53
Figura 9 - VaR de um ativo com cauda extensa	55
Figura 10 – CvaR de um ativo.....	56
Figura 11 - Fronteiras eficientes.....	67
Figura 12 – Fronteiras eficientes do modelo CVaR e do modelo de Markowitz modificado.....	72
Figura 13 – Fronteira eficiente para diferentes níveis de confiança	74
Figura 14 – Fronteira eficiente para diferentes taxas livre de risco	76
Figura 15 – Fronteira eficiente para diferente número de cenários gerados.....	78
Figura 16 – Fronteira eficiente para cenários com elevação do risco de default de um setor específico	80
Figura 17 – Histograma dos valores de portfólio simulados.....	82
Figura 18 – Fronteira eficiente para aplicação do modelo à empresas do agronegócio	85

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Exemplos de classificações de Rating	34
Tabela 2 - Tabela de taxa de recuperação.....	35
Tabela 3 - Taxa média de default acumulada	43
Tabela 4 – Estrutura de dependência - Preço da ação	64
Tabela 5 - Estrutura de dependência – Lucro líquido.....	64
Tabela 6 - Estrutura de dependência – LAJIDA	65
Tabela 7 – Características das contrapartes.....	65
Tabela 8 – Características das contrapartes.....	70
Tabela 9 – Estrutura de dependência – Estimação dos parâmetros da cópula	70
Tabela 10 – Estrutura de dependência – Correlação linear	70
Tabela 11 – Resultados do modelo de CVaR	71
Tabela 12 – Resultados do modelo de Markowitz.....	71
Tabela 13 – Resultados com nível de confiança 85%.....	74
Tabela 14 – Resultados com taxa livre de risco a 20%.....	76
Tabela 15 – Resultados com 100 cenários gerados	78
Tabela 16 – Resultados com elevação do risco de default de um setor específico	80
Tabela 17 – Características das contrapartes.....	81
Tabela 18 – Estrutura de dependência – Estimação dos parâmetros da cópula	82
Tabela 19 – Resultados com dados de empresas do agronegócio.....	83

1. Introdução

1.1. O agronegócio brasileiro

O setor agrícola brasileiro desde a colonização do país foi a atividade de maior destaque na geração de riquezas evoluindo a partir de uma economia de monocultura familiar de subsistência baseada em uma estrutura de minifúndios, para uma policultura mecanizada de grandes proporções passando a movimentar em torno de 200 bilhões de dólares por ano, sendo responsável pela geração de mais de 37% dos empregos, diretos e indiretos, além de corresponder a mais de 40% da balança comercial brasileira (ABRÃO;2006) em 2006.

O desenvolvimento das atividades agropecuárias na visão capitalista está intimamente relacionada ao avanço tecnológico (ABRÃO;2006), visto que, a mecanização do processo de colheita, da produção e da comercialização e o uso intensivo de fertilizantes e defensivos agrícolas resulta no aumento da produtividade da atividade agropecuária. Portanto, para a redução de custos e obtenção de maiores margens de lucro são necessários grandes investimentos no desenvolvimento e aquisição de tecnologias pelos produtores.

Na década de 60 a indústria agrária brasileira contava principalmente com pequenos e médios produtores que se utilizavam de uma estrutura de minifúndios com produção, em sua maior parte, manual, mas que não dispunham de capital suficiente para realizar investimentos em tecnologia necessários para modernizar a atividade produtiva. Em resposta a essa deficiência e com o intuito de promover a modernização do setor agrário brasileiro o governo federal instituiu em 1965, a primeira política de crédito rural por meio da Lei 4.829. Os principais objetivos desta política eram: “(i) financiar parte dos custos operacionais e de comercialização dos produtores; (ii) estimular a formação de capital no setor agrícola; e (iii) estimular a adoção de novas tecnologias e favorecer o pequeno e médio produtor” (BASSINELO, ARAÚJO, et al 1994 apud SOUZA). Os recursos para esta política de crédito eram provenientes principalmente de instituições públicas e algumas privadas, que poderiam escolher entre deslocar parte dos depósitos compulsórios aos investimentos em agronegócios e serem remunerados em função do risco que a instituição tomava, ou elas poderiam deixar o montante em contas específicas onde não havia remuneração ao capital.

Aliada à instituição desta política de crédito, a implementação de políticas de desvalorização cambial e subsídios nas taxas de juros, pelo governo federal, favoreceu a expansão das exportações agrícolas resultando em aumentos significativos de recursos na

agricultura. Entretanto, essa política de concessão de crédito mostrou-se uma medida problemática, pois ao conceder grandes volumes de empréstimos a taxas muito atrativas, os intermediários financeiros, responsáveis pela escolha dos beneficiários, escolhiam os grandes produtores que contavam com garantias de alta qualidade e representavam maior potencial de margens de lucro (SOUZA;2007) deixando de lado os pequenos e médios produtores que deveriam ser os maiores beneficiados por esta iniciativa.

A partir da década de 80, devido à escassez de recursos para a concessão de créditos, o governo passou a atuar na Política de Garantia de Preços Mínimos (PGPM) que garantia o preço mínimo de venda a alguns segmentos específicos da agricultura.

A política de concessão de crédito e a política de garantia de preços demandavam grandes quantias de recursos que não puderam ser mantidas pelo governo federal em função da hiperinflação observada no final da década de 80, além dos altos encargos da dívida externa contraída nas décadas de 70 e 80 e como consequência, a instituição pública deixou de atuar como principal financiador do setor agrícola.

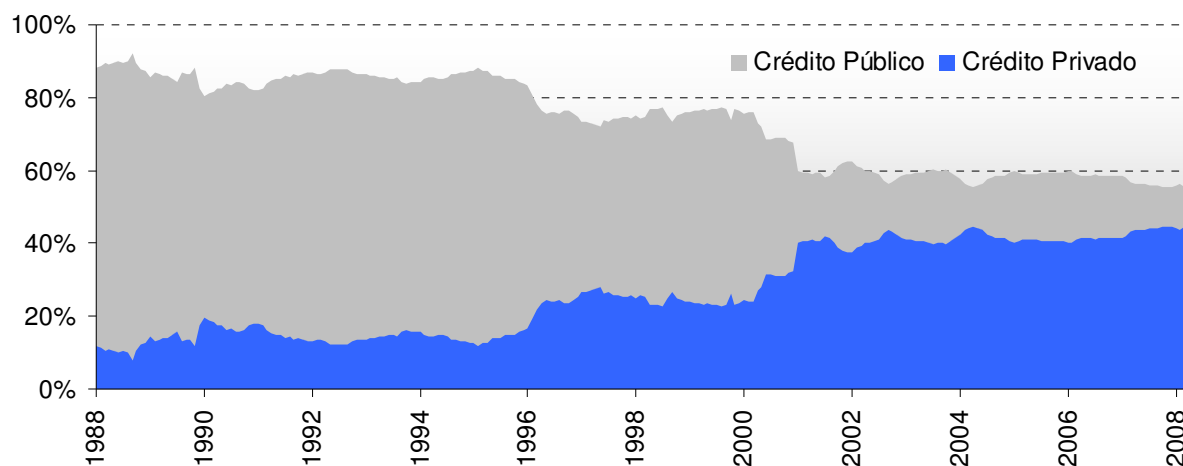


Figura 1 – Crédito Privado e Crédito Público ao setor rural

Fonte: Banco Central do Brasil

O resultado da escassez dos recursos provenientes do setor público foi que, em 1995, 30% do total de empréstimos direcionados ao setor agrário estava inadimplente e a solução encontrada para a quitação dos empréstimos inadimplentes e financiamento da renovação tecnológica foi à obtenção de crédito do setor privado, que em 2007, correspondeu a 42% de um total de R\$ 110 bilhões segundo estimativa do Banco Central do Brasil. Dentre os principais financiadores

podemos citar as cooperativas de crédito e as fornecedoras de insumo (GONÇALVES, et al 2005 apud SOUZA).

Os maiores problemas na obtenção de crédito de instituições privadas eram as elevadas taxas de juros cobradas e as garantias exigidas em função do risco de crédito adquirido por elas, além da inexistência de padronização das cláusulas contratuais deixando os produtores expostos aos interesses dos financiadores. Os primeiros contratos firmados consistiam no adiantamento de recursos para custeio com promessa de pagamento futuro, geralmente com o próprio produto a ser colhido/produzido, permitindo o financiamento da atividade agrícola simultaneamente à garantia firme de fornecimento de matéria-prima às indústrias processadoras e às exportadoras (*trading companies*).

Esses e outros contratos de comercialização não padronizados desenvolvidos para complementar a concessão de crédito rural se tornaram importantes instrumentos para o financiamento dos custos operacionais de cada safra e renovação do maquinário tecnológico e devido ao seu uso crescente passaram a chamar a atenção da esfera pública que interpretou este movimento como a sinalização da necessidade da criação de títulos de crédito padronizados para o financiamento do agronegócio brasileiro.

1.2. O problema

O crescente uso dos instrumentos de crédito do agronegócio como produtos de investimento resultou na maior exposição ao risco de crédito por parte das instituições privadas sujeitando o investidor a riscos de perdas em função de variáveis não levadas em consideração na gestão do risco de ativos tradicionais. Então, com o intuito de compreender o risco incorrido pela concentração em ativos de crédito, os investidores passaram a buscar medidas para mensuração do risco, mas as medidas tradicionais se mostraram incapazes de mensurar corretamente o potencial de perdas desta classe de ativos.

Assim, o problema identificado a ser abordado neste trabalho é a gestão de portfólios compostos exclusivamente por ativos de crédito.

1.3. Objetivo do trabalho

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização de portfólios de ativos de crédito. Para isso, é importante compreender o comportamento destes ativos, assim

como compreender a abordagem de Markowitz para composição de portfólios a partir da análise do risco e retorno. Além disso, ao longo deste trabalho será estudada uma metodologia para simular o comportamento de portfólios compostos por ativos de crédito e serão analisadas as medidas de risco existentes e as diferenças observadas entre elas para a quantificação do risco de perdas dos ativos de crédito. Para o desenvolvimento deste trabalho os artigos de Romano (ROMANO;2004) e Li (LI;2002) servirão de base.

1.4. O programa de estágio

O programa de estágio foi realizado na Vector Investimentos, uma gestora de recursos independente 100% brasileira de capital fechado criada em 2006. Como estratégias de investimento a empresa oferece a gestão de fundos de ações a partir de modelos quantitativos e a gestão de portfólios de ativos de crédito do agronegócio.

A atuação ao longo deste programa de estágio ocorreu na área de produtos estruturados, responsável pela originação e emissão de títulos de crédito do agronegócio e pela gestão de portfólios de ativos de crédito.

O desenvolvimento de um modelo de otimização de portfólios de ativos de crédito é de grande importância, visto que, este pode auxiliar a gestão de forma a maximizar o retorno reduzindo o risco de perdas além de fornecer informações importantes para a emissão de novos ativos.

2. Conceitos gerais

A seguir serão apresentados os conceitos básicos fundamentais para a compreensão deste trabalho. Dentre os conceitos a serem abordados podemos citar a caracterização dos ativos de crédito em geral, os títulos do agronegócio, o modelo de otimização de portfólios de Markowitz e a função das agências de Rating, assim como as informações fornecidas por estas.

2.1. Operações de crédito

O termo “crédito” segundo Securato (SECURATO;2002) define-se como “a relação de confiança entre duas ou mais partes numa determinada operação”. Já Chaia (CHAIA;2003) cita que a relação de confiança não é unilateral, onde as partes acreditam na capacidade ou desejo do comprador de honrar os compromissos assumidos e acreditam na qualidade do produto comprado. Securato (SECURATO;2002) corrobora com a visão citada acima ao fornecer um exemplo de uma transação de compra e venda de uma caixa de leite em um supermercado onde: (i) o comprador tem a confiança de que o produto sendo adquirido está de acordo com o especificado na embalagem; e (ii) o vendedor tem a confiança de que o dinheiro sendo recebido é legítimo.

A operação de crédito se caracteriza pela relação entre as partes com diferentes interesses que transferem entre si mercadorias, serviços ou recursos financeiros com o intuito de obter uma remuneração até uma data pré-determinada. Já as operações de crédito em uma definição fornecido por Securato (SECURATO; 2002) se caracterizam como operações de empréstimo de dinheiro, ou equivalente em termos financeiros, sobre as quais incidem uma remuneração denominada juros e, de forma geral, podem ser classificadas tanto em relação ao tipo de tomador de recursos como em relação à finalidade da contratação dos empréstimos.

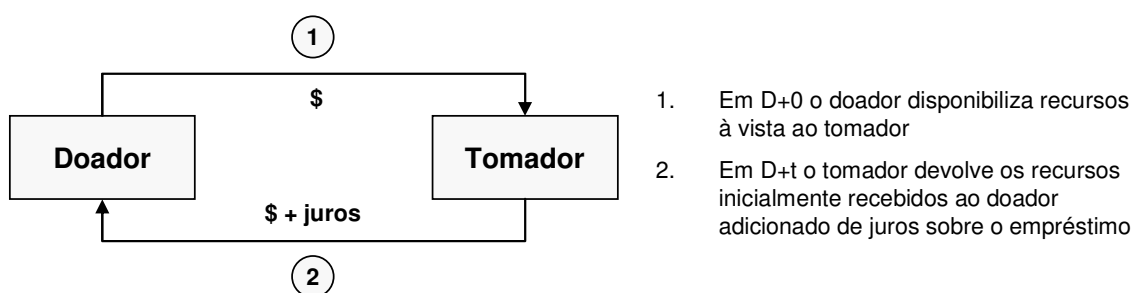


Figura 2 - Desenho esquemático de uma operação de crédito

Segundo Securato (SECURATO;2002), do ponto de vista do perfil do tomador de recursos uma operação de crédito pode ser classificada como:

(i) Crédito público – Necessidade da contratação de empréstimo pelo governo para cobertura do déficit dos gastos governamentais. De uma forma geral, estes recursos são obtidos por meio da emissão de papéis ou títulos que caracterizam obrigações com prazos e juros definidos.

(ii) Crédito privado – Necessidade de contratação de recursos pelas empresas privadas de diversos setores, para cobertura do capital de giro ou para investimentos visando à continuidade e desenvolvimento das suas atividades.

Classificando as operações de crédito no âmbito da finalidade dos recursos temos:

(i) Crédito bancário – Os recursos tomados são destinados ao financiamento das atividades bancárias de instituições financeiras;

(ii) Crédito imobiliário – Os recursos tomados são destinados ao financiamento à aquisição de imóveis;

(iii) Crédito agrícola – Os recursos tomados têm são destinados ao custeio e investimento das atividades agrícolas, de produção e comercialização inclusive;

(iv) Crédito ao consumidor – Os recursos tomados são destinados à aquisição de bens duráveis por pessoas físicas.

As operações de crédito se tornaram importantes dado o dinamismo no processo econômico que elas podem introduzir (CHAIA;2003), seja pela oportunidade de as empresas poderem investir na melhora de suas atividades operacionais, ou seja pela maior disponibilidade de recursos utilizáveis pelos consumidores.

No caso da indústria agrícola muitos dos produtores contam com recursos limitados para investir em tecnologias que possam melhorar suas atividades operacionais ou em insumos e acabam sofrendo com a competição de produtores em regiões ou países com vantagens competitivas. As operações de crédito se tornam importantes ao produtor, visto que, elas fornecem os recursos necessários ao financiamento de maquinários, tecnologias e insumos de forma a melhorar a própria situação financeira, aumentar a produtividade reduzindo ou até mesmo anulando as vantagens dos competidores.

Segundo Pereira (PEREIRA et al, 1998 apud CHAIA), o crédito vem acompanhando o desenvolvimento econômico da sociedade, e conforme as necessidades novos instrumentos de crédito foram desenvolvidos. Chaia (CHAIA;2003) cita que a falta de metodologias eficazes de previsão da inadimplência e de controles no processo de concessão de limites podem levar a economia a um processo de desaquecimento da economia.

Como verificamos acima, o crédito é uma ferramenta de grande importância, visto que ela pode afetar diversos processos econômicos de forma a melhorar a economia como um todo. Entretanto, os novos instrumentos de crédito criados de acordo com as necessidades econômicas quando utilizados de forma indiscriminada e sem metodologias eficazes de previsão dos riscos existentes podem afetar negativamente a economia colocando em jogo todos os benefícios promovidos pelo seu uso (CHAIA;2003).

Por isso, se faz necessário desenvolver metodologias capazes de mensurar da forma mais acurada e aderente possível o risco incorrido em operações de crédito para que os impactos negativos do uso dos instrumentos de crédito possam ser compreendidos e evitados por tomadores e por doadores.

2.2. Risco e spread de crédito

Cada operação no mercado financeiro resulta na exposição do tomador a um tipo específico de risco ou na combinação de diversos riscos financeiros como o risco de mercado, legal, reputacional, operacional, de liquidez, de mercado e de crédito. Conforme foi brevemente citado na subseção anterior, o uso desmedido e ilimitado dos instrumentos de crédito pode fazer com que a economia seja prejudicada como um todo, isto ocorre principalmente porque existe maior concentração de um tipo específico de risco decorrente das operações de crédito.

De acordo com John Hull (HULL;2006), o risco de crédito se define como a possibilidade de que tomadores de empréstimos fiquem inadimplentes perante os doadores, ou seja, a possibilidade de que ocorra um evento de *default*. Estes podem ser ocasionados por diversas razões inerentes aos tomadores e também à situação macroeconômica do país de residência do tomador. Stuchi (STUCHI; 2003) agrupou os fatores que podem ocasionar um evento de *default* em 5 grupos de risco distintos:

- (i) risco de inadimplência – incapacidade de pagamento de um empréstimo;

-
- (ii) risco de degradação de crédito – degradação da qualidade de crédito do tomador do empréstimo;
 - (iii) risco de degradação de garantias – degradação das garantias oferecidas pelo tomador;
 - (iv) risco soberano – incapacidade de pagamento do tomador, localizado em outro país, dada as restrições impostas pelo país de origem; e
 - (v) risco de concentração de crédito – falta de diversificação de investimentos.

Do ponto de vista quantitativo, o risco de crédito é mensurado através de uma remuneração adicional aos juros que seriam cobrados em uma operação de crédito de risco nulo, remuneração que também é conhecida como *spread* de crédito (CHAIA;2003). Segundo Securato (SECURATO;1999), *spread* é definido como a diferença entre o custo de captação de um recurso e a taxa de concessão de empréstimo a uma contraparte. Em outras palavras, o *spread* de crédito define a remuneração mínima requerida pelo credor para assumir a o risco de crédito do tomador.

A fórmula de Fisher generalizada visa ilustrar uma taxa efetiva i que garanta o ganho real r após a consideração dos diversos tipos de risco e custos de intermediação onde para cada nível de risco j existe uma taxa θ_j $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Considerando que as taxas são expressas na mesma unidade de tempo e são relativas à mesma unidade de tempo temos que:

$$(1+i) = (1+\theta_1) * (1+\theta_2) \dots (1+\theta_n) * (1+r)$$

Equação 1 - Fórmula de Fischer generalizada

Fonte: Securato

Se considerarmos que $\theta_1 = \theta$ e os demais $\theta_j = 0$, $j=2,\dots,n$. Temos:

$$(1+i) = (1+\theta) * (1+r)$$

Equação 2 - Fórmula de Fischer

Fonte: Securato

Dado que o θ representa o *spread* de crédito, a partir da Equação 2 podemos interpretar que o θ indica a remuneração adicionada à uma remuneração real r para cobrir todos os custos relacionados ao risco de crédito.

O *spread* de crédito é uma medida que busca representar a remuneração mínima requerida para assumir um determinado nível de risco de crédito e quanto maior o risco de uma contraparte, maior o *spread* de crédito (SECURATO;1999).

$$\theta_{\text{Crédito direto ao consumidor}} > \theta_{\text{Empresas de pequeno porte}} > \theta_{\text{Empresas de médio porte}} > \theta_{\text{Empresas de grande porte}}$$

Equação 3 - Risco de crédito e spread de crédito

Fonte: Securato

Assim, o risco de crédito se define como o risco de *default* de uma contraparte tomadora de recursos em uma operação de crédito. Já o *spread* de crédito se define como a remuneração requerida para que o risco de crédito seja assumido pelo credor.

2.3. Títulos de crédito

Títulos de crédito são instrumentos financeiros utilizados nas operações de crédito emitidos pelas instituições com promessa de pagamento futuro dos recursos captados na data de sua emissão. Esses fluxos de pagamento futuros podem ser fixos, ou podem ser indexados a indicadores de inflação ou taxas de juros do mercado entre outros indexadores, neste caso é possível conhecer o valor a ser recebido, ou ao menos estimá-lo a qualquer momento.

À medida que o volume das operações de crédito aumentou e o uso dos títulos de crédito como instrumento de captação se dispersou ao longo dos mercados globais deixando as instituições cada vez mais expostas ao crédito, a mensuração do risco de crédito se tornou um dos maiores desafios na gestão de riscos. Foram criadas diversas abordagens com o objetivo de gerenciar o risco de crédito, monitoramento dos tomadores, estabelecimento de provisões para cobrir um eventual *default*, entretanto, a complexidade do mercado de crédito exigiu controles cada vez mais sofisticados que fornecessem informações acuradas a respeito do risco existente nas operações de crédito para que tomadores e doadores pudessem conhecer o risco ao qual eles se sujeitam.

Então, com o intuito de compreender qual o risco real, surgiram os primeiros modelos de quantificação do risco de crédito que visavam modelar os riscos de concentração. Dentre as razões para desenvolver um modelo quantitativo do risco de crédito podemos citar (GUPTON,GINFER, BHATIA;1997):

-
- (i) Análises qualitativas para definição do limite de crédito não mensuram corretamente a relação entre risco e retorno;
 - (ii) Compreender os efeitos de um portfólio (benefícios e riscos da concentração e diversificação) e entender que quanto pior a qualidade do crédito, maior o risco marginal, pode resultar em uma metodologia racional para alocação do risco de capital.

Entretanto, a modelagem do risco de ativos de crédito não é simples, de acordo com Gupton, Ginfier e Bhatia (GUPTON,GINFER, BHATIA;1997) existem 2 grandes problemas:

- (i) Para analisar o comportamento de uma ação é utilizada a abordagem de que os retornos apresentam distribuição normal. Portanto, o uso de medidas estatísticas, como média, variância e desvio-padrão, são suficientes para auxiliar na quantificação do risco de mercado e a concentração do portfólio. Já para analisar um ativo de crédito, o uso destas mesmas medidas estatísticas são inadequadas e insuficientes, visto que, os retornos não apresentam distribuição normal, conforme ilustrado na Figura 3 , por isso é necessário o uso de outras medidas para se analisar corretamente o comportamento de um ativo de crédito. A longa cauda na distribuição dos retornos de crédito pode ser explicada pelos eventos de *default*, visto que, os ganhos em uma operação de crédito são limitados, mas as perdas são limitadas inferiormente pela perda total do valor comprometido.

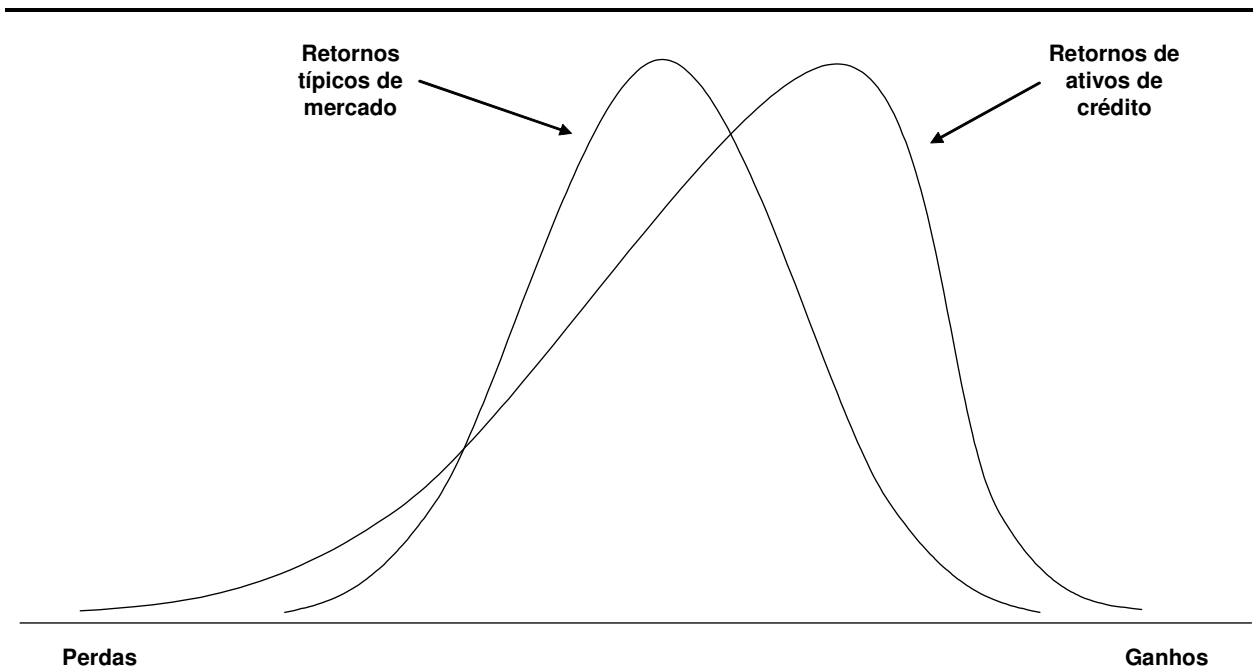


Figura 3 - Comportamento de um ativo de crédito

Fonte: JP Morgan

- (ii) O segundo grande problema identificado é a dificuldade de se modelar as correlações entre diversos ativos. No caso das ações, as correlações podem ser facilmente estimadas pela observação dos preços de alta frequência de ativos líquidos facilmente encontrados em diversos sistemas de informações como o Bloomberg e Reuters. Mas no caso dos ativos de crédito os seus preços não são amplamente divulgados e a falta de dados dificulta e até mesmo impossibilita a análise da correlação entre ativos de crédito.

Os títulos de crédito são elementos essenciais na maioria das operações de crédito, visto que, eles são os instrumentos financeiros que representam uma dívida contraída por um devedor, como por exemplo, as CPRs, CDCAs e CDA-WAs emitidos por instituições do agronegócio para captação de recursos. Características observadas nos títulos de crédito como baixa liquidez dos ativos que resultam em poucos dados para análise e a distribuição não normal dos retornos, dificultam a análise e quantificação do risco de crédito das operações de crédito tornando o desenvolvimento de novas metodologias de mensuração de risco necessária.

2.4. Títulos do agronegócio

Com o intuito de incentivar o financiamento do agronegócio por entidades privadas o governo instituiu títulos de crédito padronizados com características que traziam segurança a tomadores e doadores e facilitavam a concessão de recursos ao setor agrícola entre outras vantagens. Dentre os instrumentos de financiamento criados podemos citar a CPR, o CDCA, o CRA, o LCA e o CDA-WA que serão apresentados a seguir.

CPR – Cédula do Produto Rural

Um dos primeiros instrumentos criados foi a Cédula do Produto Rural (CPR) instituída pela Lei 8.929 e alterada pela Lei 10.200, quando passou a contar com a modalidade de liquidação financeira (Cédula do Produto Rural Financeira – CPRf). Este instrumento emitido exclusivamente por produtores rurais, pessoas físicas e jurídicas, assim como, cooperativas de crédito em favor dos financiadores garante ao seu portador a promessa de recebimento de pagamento futuro, em produto ou em dinheiro.

A CPR é considerada um instrumento de captação de recursos muito importante aos produtores e também um instrumento de proteção contra as oscilações do produto em questão, visto que, o preço de venda do produto é acordado no momento da emissão do título e tal valor deverá ser considerado para liquidação da CPR em data futura.

Como a produção agrícola apresenta comportamento sazonal, existem períodos de maior demanda pelos insumos agropecuários cujos preços sofrem aumento. Como a CPR é um título que pode ser emitido em qualquer época, ela permite ao produtor se financiar nos períodos de entressafra quando ele pode adquirir os seus insumos a um custo menor do que o verificado no período de safra.

Apesar do sucesso relativo deste instrumento ilustrado pelo aumento do volume das CPRs emitidas, de R\$ 26 milhões (64 títulos) em 1994, ano de criação do instrumento, aos R\$ 20 a 30 bilhões (62.435 títulos) na safra 2004/2005, Spolador (SPOLADOR, et al 2001 apud SOUZA) afirma que este instrumento ainda está restrito a poucos produtos e em volume muito inferior ao necessário.

Segundo Gustavo Silva (SILVA;2006), existem 3 fatores associadas ao uso da CPR como instrumento de captação de recursos que limitam o seu uso: (i) uma pequena parcela dos produtos agrícolas produzidos apresenta as características determinadas pelo mercado financeiro como

qualificadoras; (ii) a bolsa de futuros brasileira, possui baixo nível de liquidez e; (iii) o elevado custo do aval, as altas taxas de juros e a falta de tomadores de risco. O autor acima também afirma que apesar do sucesso deste instrumento, ele não resolve o problema da elevada demanda pelo crédito do setor, visto que, os produtores o utilizam para financiar uma pequena parte da sua necessidade devido os altos custos que incorrem da sua emissão.

Em 1º de outubro de 2004, com o intuito de cumprir as diretrizes expostas no Plano Agrícola e Pecuário 2004/2005, foi instituído por meio de uma Medida Provisória (MP) o Certificado de Depósito Agropecuário (CDA) e o Warrant Agropecuário (WA), alguns dos novos instrumentos do agronegócio criados com o objetivo de incentivar e facilitar a renovação tecnológica melhorando o baixo nível de eficiência e elevado nível de perdas da produção.

Posteriormente, no dia 30 de dezembro de 2004, a MP foi finalmente convertida na Lei 11.076 com algumas alterações e a inclusão de 3 novos títulos do agronegócio: (i) o Certificado de Direitos Creditórios (CDCA); (ii) a Letra de Crédito do Agronegócio (LCA) e; (iii) o Certificado de Recebíveis do Agronegócio (CRA).

CDA-WA – Certificado de Depósito Agropecuário/ Warrant Agropecuário

O CDA é um título de crédito que representa promessa de entrega de produtos agropecuários, seus derivados, subprodutos e resíduos de valor econômico, depositados em conformidade com a Lei no 9973 de 29 maio de 2000 (Lei 11076). Já o Warrant agropecuário (WA), é um título de crédito que representa promessa de pagamento em dinheiro que confere direito de penhor sobre o CDA correspondente, assim como sobre o produto nele descrito (Lei 11.076). Este título é emitido simultaneamente ao CDA, e pode ser transmitido unido ou separadamente, mediante endosso.

A emissão do CDA é exclusivamente concedida ao agente que possui o produto agropecuário e o depositou em armazém habilitado para a emissão do título. Ou seja, em troca do depósito do produto o depositante recebe do agente, responsável pela armazenagem do produto, uma cédula que indica a promessa de entrega do produto agropecuário depositado nas mesmas características e qualidade. É importante citar que a partir do momento da emissão do CDA com ou sem o WA, o agente assume a obrigação de guardar, conservar e manter a qualidade e a quantidade do produto recebido em depósito devendo entregá-lo ao detentor do título na quantidade e qualidade descritas no título. Apesar de muito semelhante à Cédula do Produto

Rural, o CDA por si só exige o WA para garantir o direito de penhora do produto enquanto a CPR permite o penhor do produto descrito na cédula.

Assim, a combinação CDA-WA é instrumento de grande importância, pois permite o financiamento dos agentes depositantes ao mesmo tempo que reduz o perfil de inadimplência ao conceder o penhor do produto em questão ao detentor do título.

CDCA/LCA/CRA – Certificado de Direitos Creditórios do Agronegócio/Letra de Crédito do Agronegócio/Certificado de Recebíveis do Agronegócio

O CDCA, o LCA e o CRA são títulos de crédito do agronegócio de livre negociação no mercado, representativos de promessa de pagamento em dinheiro e constituem títulos executivos extrajudiciais que são vinculados a direitos creditórios originados a partir de negócios realizados entre produtores rurais, ou suas cooperativas e terceiros, inclusive financiamentos ou empréstimos relacionados com a produção, comercialização, beneficiamento ou industrialização de produtos ou insumos agropecuários ou de máquinas e implementos utilizados na atividade agropecuária (Lei 11.076).

A principal diferença entre estes títulos é a emissão exclusiva por diferentes tipos de agentes do mercado agropecuário.

O CDCA é um título de emissão exclusiva de cooperativas de produtores rurais e de outras pessoas jurídicas que exerçam a atividade de comercialização, beneficiamento ou industrialização de produtos e insumos agropecuários ou de máquinas e implementos utilizados na produção agropecuária. Já a LCA é um título de emissão exclusiva de instituições financeiras, públicas ou privadas. O CRA pode ser emitido exclusivamente pelas securitizadoras, que são instituições não financeiras constituídas sob a forma de sociedade por ações e terão por finalidade a aquisição e securitização desses direitos e a emissão do CRA no mercado financeiro e de capitais.

Além das características apresentadas acima, podemos citar também que os novos títulos do agronegócio deverão ser registrados em sistemas de registro e de liquidação financeira de ativos autorizados pelo Banco Central do Brasil e serão negociados como ativos financeiros nos mercados de bolsa e de balcão. É relevante citar também que estes títulos são considerados executivos extrajudiciais o que implica na aplicação das penalidades previstas em Lei e em contrato sem a necessidade de recorrer ao sistema Judiciário, tornando o processo de execução das garantias, isto é a tomada das garantias, em caso de inadimplência mais ágil.

Assim, segundo Gustavo Silva (SILVA;2006), o financiamento deixa de atingir somente a atividade de cultura de produtos e passa a atingir todas as etapas da atividade agropecuária.

É possível ressaltar ainda 3 características destes títulos que permitem a atuação mais ampla de fundos de investimento na comercialização e investimento no setor agropecuário (SILVA;2006): (i) a garantia de instituição financeira ou seguro dos títulos; (ii) o registro dos títulos em sistemas de registro e de liquidação financeira de ativos autorizados pelo Banco Central e/ou pela Comissão de Valores Mobiliários e; (iii) custódia em sistemas de registro e de liquidação financeira de ativos autorizados pelo Banco Central ou em instituição autorizadas a prestar serviços de custódia pela CVM.

Assim, à medida que estes títulos instituídos pela Lei 11.076 substituem as incertezas jurídicas, legais e tributárias por um conjunto de parâmetros, o tomador de risco passa a investir e a comercializar estes títulos de forma mais ativa visando os ganhos de capital e, como consequência, o setor agropecuário acaba sendo beneficiado ao financiar as necessidades dos produtores rurais com a menor intervenção de intermediários e a taxas de juros mais reduzidas.

2.5. Rating

Em decorrência das diversas crises financeiras globais ocasionadas pela elevação do risco de crédito como a crise dos tigres asiáticos e a crise do sub-prime, e a preocupação acerca dos impactos negativos das operações de crédito no mercado financeiro, foram estabelecidas no âmbito do Comitê de Basileia e do Banco Central do Brasil, no caso brasileiro, regras com o intuito de mitigar o risco de crédito. Entretanto, apesar dessas iniciativas que visavam estabelecer controles mais rígidos acerca das operações de crédito, o risco de crédito persistia como a principal preocupação dos investidores, visto que muitos deles desconheciam o risco que eles incorriam nestas operações.

Surgem então as Agências de Rating, instituições com conhecimento empírico e técnico suficiente para realizar análises qualitativas e quantitativas acerca do conjunto de informações econômicas e financeiras de uma operação de crédito e/ou da contraparte tomadora em variados cenários de estresse com o intuito de mensurar o risco de crédito de forma independente, objetiva e com discrição. Esta classificação de risco de crédito dada pelas agências, o *Rating*, vide Tabela 1, é uma nota atribuída à operação e/ou contraparte que visa informar qual o nível de risco de

crédito existente para que investidores e tomadores possam definir o *spread* de crédito, ou seja, qual a remuneração mínima requerida para se assumir tal risco.

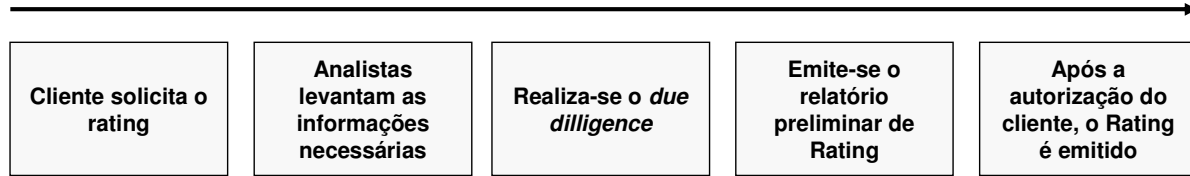


Figura 4 - Processo de emissão de rating

Fonte: Standard & Poor's

Tabela 1 - Exemplos de classificações de Rating

Rating	Definição
Aaa	Obrigações de qualidade muito alta e risco de crédito mínimo
Aa	Obrigações de qualidade alta sujeitas a risco de crédito muito baixo
A	Obrigações de qualidade média sujeitas a risco de crédito baixo
Baa	Obrigações sujeitas a risco de crédito moderado. São consideradas de nível médio e podem apresentar características especulativas.
Ba	Obrigações que contêm elementos especulativos e estão sujeitas a risco de crédito substancial
B	Obrigações consideradas especulativas sujeitas a risco de crédito alto
Caa	Obrigações de qualidade baixa sujeitas a risco de crédito alto
Ca	Obrigações consideradas altamente especulativas e com grande probabilidade de se tornarem inadimplentes, mas com alta taxa de recuperação do principal e juros
C	Obrigações com a pior qualificação que já se tornaram inadimplentes, e com alta taxa de recuperação do principal e juros

Fonte: Moody's

Além das classificações de risco as agências de risco também fornecem informações importantes relacionadas às operações de crédito como as taxas de recuperação para cada nível de subordinação legal vide Tabela 2. As taxas de recuperação são percentuais do montante inadimplente pela contraparte tomadora que pode ser recuperada por meio de procedimentos jurídicos. Essas informações se baseiam na análise do histórico de operações de crédito de empresas ou operações com o mesmo Rating onde ocorreram eventos de *default* e são freqüentemente utilizadas como uma *Proxy* do valor recuperável em um evento futuro de *default*.

Tabela 2 - Tabela de taxa de recuperação

Nível de subordinação	Taxa de recuperação média
Classe Senior com Seguro	53.80%
Classe Senior sem Seguro	51.13%
Classe Senior Subordinada	38.52%
Classe Subordinada	32.74%
Classe Subordinada Júnior	17.09%

Fonte: Moody's

Assim, as agências de Rating passam a assumir um importante papel no mercado financeiro, uma vez que, elas agregam diversas informações financeiras e econômicas em poucos indicadores que facilitam a compreensão do risco incorrido, por tomadores e doadores, em uma operação de crédito.

2.6. Teoria moderna de portfólios

Em 1952, Harry Markowitz introduziu a Teoria Moderna de Portfólios (TMP), ou *Modern Portfolio Theory*, em seu artigo (MARKOWITZ;1952). Antes da publicação deste trabalho a seleção de portfólios era feita pela análise dos riscos e retornos individuais dos ativos para a maximização do retorno do portfólio de acordo com o nível de risco e desejado. Entretanto, dessa forma apenas os riscos individuais dos ativos eram considerados ignorando riscos sistêmicos e correlações entre empresas do mesmo setor econômico podendo ocasionar perdas inesperadas. A Teoria Moderna de Portfólios apresenta conceitos de diversificação, variância do portfólio e fronteira eficiente para demonstrar que para a análise de risco e retorno, deve-se levar em consideração o portfólio como um todo e não apenas os ativos independentemente.

2.6.1. Modelo de média-variância

A partir de informações como retorno esperado e variância de uma carteira de ativos, Markowitz (MARKOWITZ;1952), desenvolveu o seguinte modelo de média-variância que propõe a alocação ótima dos portfólios reduzindo o risco de perda, nesse caso mensurado pela variância, dado um nível de retorno esperado.

$$R_p = \sum_i w_i R_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\sum_i w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, \forall i$$

Onde:

R_p : retorno do portfólio P

R_i : retorno do ativo i

w_i : peso do ativo i no portfólio P

σ_p^2 : variância do portfólio P

ρ_{ij} : correlação entre o ativo i e o ativo j

Neste modelo nota-se que o retorno do portfólio é a média ponderada dos retornos individuais dos ativos, onde w_i representa o peso alocado ao ativo i, assim, pode-se afirmar que ele segue um comportamento puramente linear dependente do peso de cada ativo i. No caso da variância do portfólio verifica-se que ele segue um comportamento quadrático por se tratar da somatória ponderada dos desvios padrões, pesos e correlação dos ativos. Para a definição do portfólio ótimo a função objetivo é a minimização da variância do portfólio considerando $\sum_i w_i = 1$ como a equação que garante que a exposição inicial é a mesma que a final.

2.6.2. Fronteira eficiente

Markowitz (MARKOWITZ;1952) analisa o conceito de fronteira eficiente que se trata de uma curva onde o eixo x representa a medida de risco analisada, o desvio padrão do portfólio no caso, e o eixo y representa o retorno esperado do portfólio, indicando o retorno máximo de um portfólio para cada nível de risco. Ela apresenta formato convexo, visto que, investidores são avessos ao risco e, portanto requerem retornos cada vez maiores para maiores riscos incorridos.

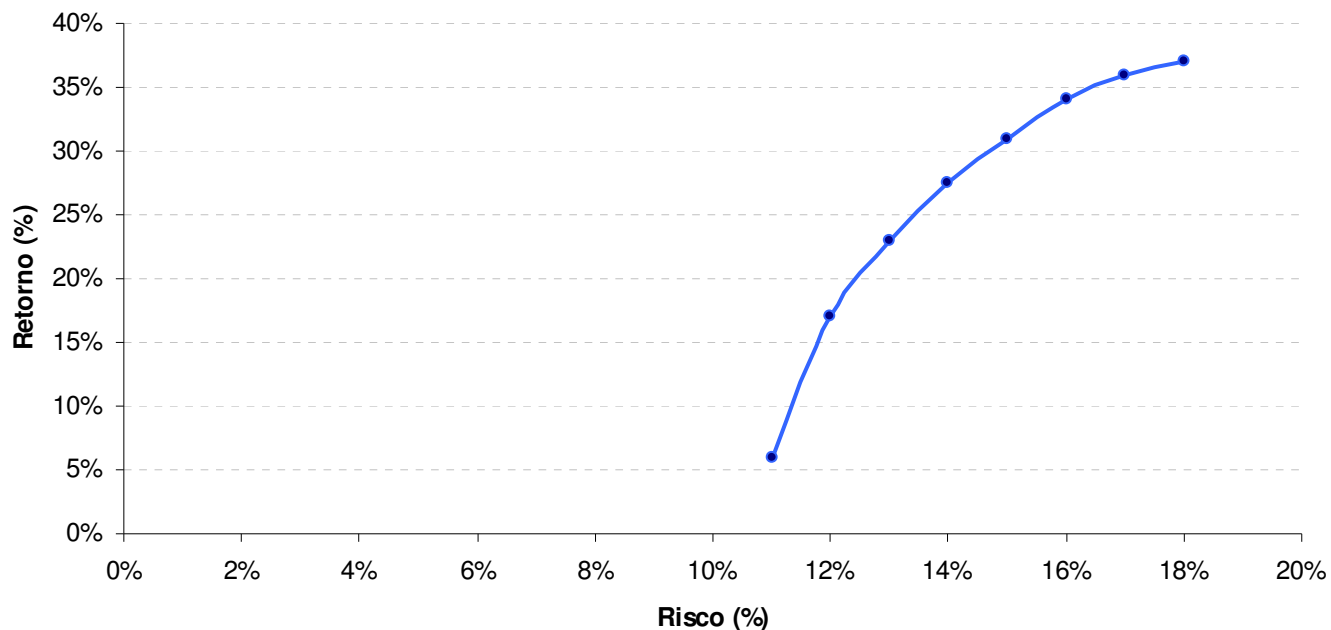


Figura 5 - Fronteira eficiente

Fonte: Markowitz

Tomando como exemplo um portfólio composto de dois ativos diferentes, pode-se alterar o perfil de risco e retorno do portfólio alterando-se o peso em cada um dos ativos até que a fronteira eficiente representada na Figura 5 possa ser obtida. Um portfólio ineficiente do ponto de vista do risco e retorno se encontrará no lado direito da curva, distante da mesma. Como a fronteira representa o máximo retorno esperado para cada nível de risco, é intuitivo que o gestor de um portfólio procure ajustar o peso de cada ativo até que o mesmo se situe sobre a fronteira eficiente.

3. Conceitos para geração de cenários

Para a mensuração do risco de um ativo a análise de uma grande quantidade de dados a respeito do seu comportamento é essencial, pois diminui a probabilidade de um movimento inesperado. Porém, a obtenção de dados de ativos de crédito é difícil pela sua baixa disponibilidade. A situação se torna mais crítica quando se trata de ativos de crédito de empresas do agronegócio brasileiro que em geral são empresas familiares de capital fechado tornando disponíveis poucas informações sobre elas e o comportamento de seus ativos de crédito dificultando a análise de risco. Além disso, os retornos dos ativos de crédito apresentam comportamento não normal dificultando a quantificação de risco destes ativos pelos modelos tradicionais.

A seguir serão apresentados conceitos para o desenvolvimento de um modelo de Simulações de Monte Carlo para geração de cenários da distribuição de perdas de um portfólio de crédito. Dentre os conceitos pode-se citar o tempo até o *default*, que simula o adimplemento ou inadimplemento de cada contraparte ao final do período desejado simulando a perda do ativo e também o conceito da cópula t de Student que melhor descreve a estrutura de dependência de *default* dos ativos.

3.1. Cópulas

Atualmente, as companhias estão sujeitas aos mesmos fatores externos o que pode resultar na vivência de dificuldades financeiras ao mesmo tempo ocasionando eventos de *default* conjuntos. Assim, com o intuito de descrever o comportamento de inadimplemento de duas ou mais companhias Hull (HULL;2006) define o termo correlação de *default*, também conhecido como estrutura de dependências dos eventos de *default*. Li (LI;2000) reconhece que existem diversas formas de determinar a estrutura de dependência dos eventos de *default*, mas em seu trabalho ele utiliza a abordagem das funções de cópula para a determinação da estrutura de dependências que será utilizada para determinação da distribuição conjunta dos tempos até o *default* das contrapartes.

Em 1959, Abe Sklar desenvolveu um teorema que buscava descrever funções que uniam distribuições univariadas para formar funções de distribuições multivariadas, chamadas de cópulas (NELSEN;1998). Desde então as cópulas se tornaram uma ferramenta de modelagem de distribuições multivariadas muito popular em diversas áreas, inclusive finanças, onde ela é

frequentemente aplicada em análises de alocação de ativos, *credit scoring*, modelagem de risco de *default*, precificação de derivativos e gestão de riscos (YAN;2006).

3.1.1. Definição

A função densidade de probabilidade de uma distribuição multivariada, $F(X_1, X_2, \dots, X_i)$, pode ser calculada por meio de uma cópula $C(Y_1, Y_2, \dots, Y_i)$ e de suas distribuições marginais contínuas, $F(X_1, X_2, \dots, X_i) = C(F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_i})$, onde F_{X_i} é a distribuição marginal do ativo da contraparte i . Se as distribuições marginais são contínuas, a cópula pode ser calculada por meio da função densidade de probabilidade acumulada e das marginais tal que:

$$C(x, y) = F(F_{X_1}^{-1}(x_1), F_{X_2}^{-1}(x_2), \dots, F_{X_i}^{-1}(x_i))$$

Equação 4 - Determinação da cópula

Uma função de cópula n -dimensional C é uma função densidade de probabilidade multivariada com margens uniformemente distribuídas no intervalo $[0,1]$ e segue as seguintes propriedades:

- (i) $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$;
- (ii) C é aderente e crescente;
- (iii) C tem margens C_i ($i=1, \dots, n$) que satisfaz: $C_i(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$ para todos $u \in [0,1]$

3.1.2. Teorema de Sklar

O Teorema de Sklar (NELSEN;1998) enuncia que dada uma função densidade de probabilidade F n -dimensional com margens contínuas $F_1^{(*)}$, $F_2^{(*)}$, ..., $F_i^{(*)}$, então existe uma única cópula que representa a função F :

$$F(x_1, \dots, x_i) = C(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i))$$

Equação 5 - Exemplo do Teorema de Sklar

Do teorema é possível interpretar que para funções de distribuição multivariadas, as marginais univariadas e sua estrutura de dependência podem ser separadas. Portanto, pode-se concluir que as cópulas são funções que descrevem a estrutura de dependência de uma distribuição multivariada a partir das distribuições marginais assumindo que estas são contínuas e sem conhecer o comportamento destas.

3.1.3. Cópula t de Student

A cópula t de Student é a função que une distribuições marginais de forma que a distribuição multivariada tenha o comportamento de uma distribuição t de Student. Apesar de existirem diversos outros tipos de funções de cópula, Romano (ROMANO;2004) afirma que a cópula t de Student é a que melhor descreve a estrutura de dependência entre variáveis de tempo até o *default* por apresentar maior peso nas caudas, reproduzindo o comportamento de perda dos ativos de crédito. Seguindo esta abordagem esta será a cópula adotada para o desenvolvimento deste trabalho.

Considerando que $C_v^t(u_1, u_2, \dots, u_i)$ representa a cópula t de Student com v graus de liberdade, que t_v^i representa a distribuição multivariada t de Student e que $t_v^{-1}(u_i)$ representa a inversa de uma distribuição t de Student, a cópula t de Student pode ser analiticamente representada por:

$$C_v^t(u) = t_v^i[t^{-1}(u_1), \dots, t^{-1}(u_i)]$$

Equação 6 - Cópula t de Student

3.2. Tempo até o *default*

Com o intuito de quantificar o risco de crédito, Li (LI;2000) estudou diversas técnicas de análise de sobrevivência frequentemente utilizadas em outras áreas com problemas similares ao estudado em seu trabalho, e então definiu a variável aleatória que denota o intervalo de sobrevivência, a variável “tempo até o *default*”, parâmetro básico para a avaliação do risco de crédito de um título.

Para a avaliação do risco de crédito de um ativo adota-se a hipótese de que com o passar do tempo a probabilidade de *default* é crescente, portanto, em algum momento da vida de um ativo de crédito ocorrerá um evento de *default*.

Segundo Li (LI;2000), para a determinação precisa da variável tempo até o *default*, é preciso definir:

- (i) Origem de tempo clara, evitando ambiguidade;
- (ii) Escala de tempo para mensurar a passagem do tempo; e
- (iii) Caracterização de um evento de *default*.

Foi definido então que:

- (i) O tempo atual seria a Origem de tempo para que fosse possível utilizar as informações em tempo real para determinar as probabilidades de *default* condicional ao longo dos anos;
- (ii) A escala de tempo seria a medida em anos para modelos contínuos, ou o número de períodos para modelos discretos; e
- (iii) O evento de *default* é caracterizado como o não pagamento dos juros/amortização de principal de uma obrigação em uma data previamente definida.

A variável tempo até o *default* é instrumento essencial para a determinação do tempo de sobrevivência e do tempo até a ocorrência de um evento de *default* no caso dos títulos de crédito. A seguir, serão apresentadas a função de sobrevivência e o conceito de *hazard rate* que dependem da variável tempo até o *default* e que serão utilizados no modelo para quantificação do risco de crédito.

3.2.1. *Hazard rate*

A intensidade de *default* também conhecida como *hazard rate* de um ativo de crédito é a probabilidade condicional da ocorrência de um evento de *default* dado que não houve nenhum evento anterior até o tempo t . Na Tabela 3 é possível verificar probabilidades de *default* acumuladas para diversas classificações de Rating e para diferentes horizontes de tempo. Cada entrada da tabela representa a probabilidade de ocorrência de um evento de *default* para o horizonte de tempo t e foi obtida a partir de análises quantitativas de dados históricos de inadimplementos de empresas de acordo com a respectiva classificação de Rating.

Tabela 3 - Taxa média de default acumulada

Taxa média de <i>default</i> acumulada		Tempo (anos)								
		1	2	3	4	5	7	10	15	20
Rating	Aaa	0.00%	0.00%	0.00%	0.04%	0.12%	0.29%	0.62%	1.21%	1.55%
	Aa	0.02%	0.03%	0.06%	0.15%	0.24%	0.43%	0.67%	1.51%	2.70%
	A	0.02%	0.09%	0.23%	0.38%	0.54%	0.91%	1.59%	2.94%	5.24%
	Baa	0.20%	0.57%	1.03%	1.62%	2.16%	3.24%	5.10%	9.12%	12.59%
	Ba	1.26%	3.48%	6.00%	8.59%	11.17%	15.44%	21.01%	30.88%	38.56%
	B	6.21%	13.76%	20.65%	26.66%	31.99%	40.79%	50.02%	59.21%	60.73%
	Caa	23.65%	37.20%	48.02%	55.56%	60.83%	69.36%	77.91%	80.23%	80.23%

Fonte: Moody's

Tomando como exemplo um ativo de crédito com Rating B, da tabela verificamos que a probabilidade de *default* até o 5º ano é de 31.99% e a probabilidade até o 4º ano é de 26.66%. Sabendo que não houve nenhum evento de *default* até o 4º ano, a probabilidade de *default* no 5º ano é de 7.27%. Neste caso podemos dizer que a *hazard rate* para um ativo com classificação de Rating B, no 5º ano dado que não houve inadimplemento nos 4 primeiros anos é de 7.27%.

$$P_B = \frac{P_{5^\circ \text{ano}}}{1 - P_{4^\circ \text{ano}}} = \frac{31.99\% - 26.99\%}{1 - 26.99\%} = 7.27\%$$

Equação 7 - Cálculo da probabilidade de default condicional

Considerando t como o intervalo de tempo em anos e que i representa a contraparte, para um pequeno intervalo de tempo Δt e considerando que a *hazard rate* da contraparte i em t é definida como $h_i(t)$ tal que em Δt a probabilidade de *default* entre t e $t + \Delta t$ é igual a $h_i(t)\Delta t$ condicional à não ocorrência de *default* em períodos anteriores a t . Considerando também que $S(t)$, função de sobrevivência, é a probabilidade de não ocorrer um evento de *default* até o intervalo t , temos:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = -h_i(t)S(t)\Delta t$$

e no limite temos:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -h_i(t)S(t)$$

de onde podemos concluir que:

$$S(t) = e^{-\int_0^t h_i(t)dt}$$

Equação 8 - Função de sobrevivência

Definindo que $F(t)$ é a probabilidade de *default* no intervalo de tempo t , temos que:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h_i(t)dt} = \Pr(T \leq t) = 1 - S(t)$$

Equação 9 - Função de probabilidade de default

Assumindo que a função *hazard rate* é constante ao longo do tempo (LI;2000), isto é, $h_i(t)=h_i$, temos que:

$$F(t) = 1 - e^{-h_i t}$$

Equação 10 - Função de probabilidade de default com hazard rate constante

Assim, podemos verificar a partir da Figura 6 que a $F(t)$ é uma curva crescente que se estabiliza em 1, ou seja, com o passar do tempo a probabilidade de ocorrência de um evento de *default* é crescente confirmando que inevitavelmente ocorrerá um evento de *default* ao longo da vida do ativo.

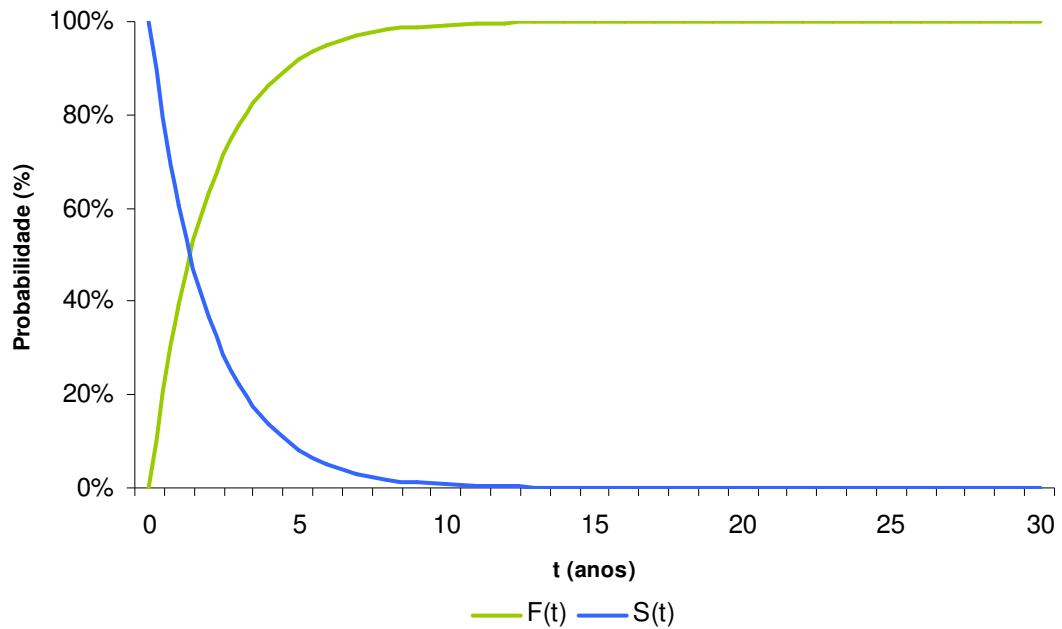


Figura 6 - Gráfico F(t) X S(t)

A *hazard rate* é de grande importância na quantificação do risco de crédito, visto que ela é o parâmetro que indica a velocidade com que a probabilidade de *default* aumenta ao longo do tempo indicando a relação entre tempo até o *default* e a probabilidade de perdas.

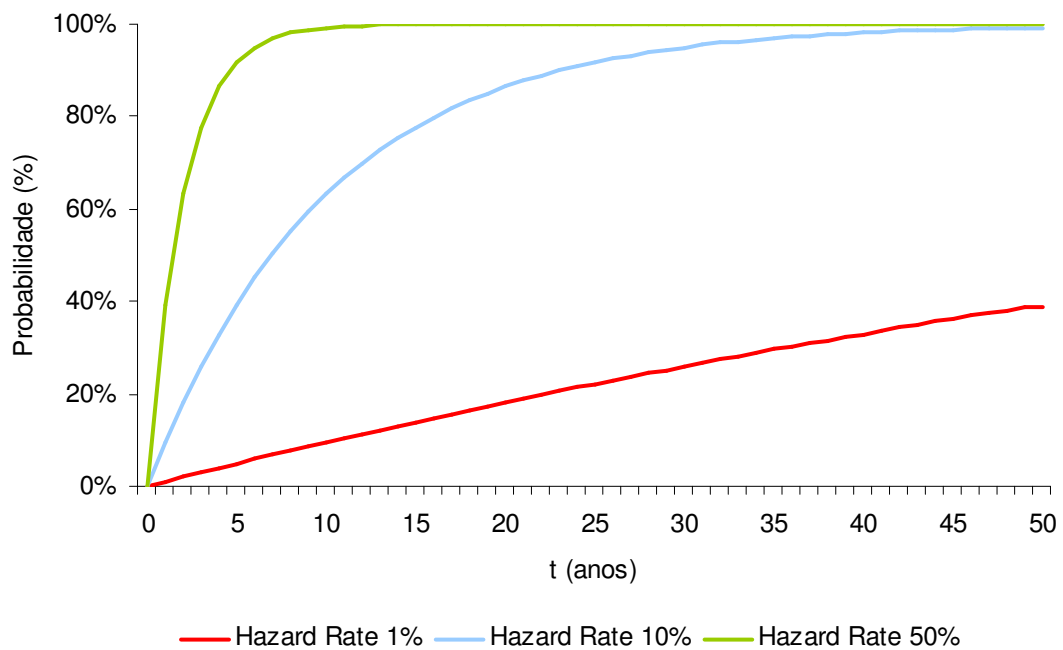


Figura 7 - Gráfico com diferentes Hazard Rates

Dada a importância deste conceito ele deve ser cuidadosamente calibrado a partir de dados que reflitam a realidade. Para calibrar corretamente a *hazard rate*, $h_i(t)$, Romano propõe (ROMANO;2004) que sejam consideradas a taxa livre de risco, taxa de juros cobrada em uma operação sem risco de crédito que equivale à taxa DI (taxa de depósitos interbancários calculada diariamente pela CETIP) no caso brasileiro, o *spread* de crédito, remuneração solicitada para compensar o risco de crédito, e a taxa de recuperação da dívida em um evento de *default* informada pelas agências de Rating. Romano propõe os seguintes métodos (ROMANO;2004):

- (i) Calibração a partir da probabilidade acumulada de *default*, vide Tabela 3, informação fornecida por assessorias internas ou externas, neste caso as agências de Rating. Considerando que $q_i(0,t)$ é a probabilidade de *default* no horizonte de tempo $(0,t)$ a partir da Equação 10 temos:

$$h_i(t) = \frac{-\ln(1 - q_i(0,t))}{t}$$

Equação 11 - Calibração da hazard rate, método 1

- (ii) Calibração a partir da taxa livre de risco r_f , do *spread* de crédito cs_i e da taxa de recuperação R_i de acordo com a classificação de Rating do ativo. Considerando que

$$h_i(t) = -\ln \left(1 - \left(1 - \frac{e^{-(r_f(t) - cs_i(t))t}}{e^{-r_f(t)t}} \right) \frac{1}{1 - R_i} \right)$$

Equação 12 - Calibração da Hazard Rate, método 2

No caso da Equação 11, a calibração da função fica sujeita à disponibilidade da informação da probabilidade de *default* acumulada fornecida por áreas internas ou por empresas especializadas como as empresas de Rating. O uso desta abordagem muitas vezes pode resultar no cálculo de uma *hazard rate* muito defasada com a realidade, visto que, a probabilidade acumulada é obtida a partir de dados históricos e calculada periodicamente, portanto mudanças no curto prazo não são refletidas na probabilidade acumulada, inclusive aquelas bruscas.

Já no caso da Equação 12, a calibração é feita com base em dados calculados diariamente por instituições que prestam serviços financeiros, no caso da taxa livre de risco, ou por

instituições financeiras como bancos de investimento, no caso do *spread* de crédito. A principal vantagem desta abordagem é que ela reflete mudanças econômicas de curto prazo apesar de a taxa de recuperação, calculada periodicamente por agências de Rating, não captar mudanças do curto prazo.

Portanto, dada a importância da *hazard rate* para quantificação do risco de títulos de crédito, é necessário escolher a abordagem de calibração cuidadosamente. Para o modelo de risco de crédito a ser apresentado neste trabalho, é relevante que ela possa refletir mudanças de curto prazo do cenário econômico, visto que, elas podem alterar significativamente o risco de crédito de um ativo/portfólio interferindo na composição do portfólio ótimo. Assim, o método de calibração escolhido foi o número 2.

3.3. Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um método computacional de geração de cenários a partir de um conjunto de *inputs* e restrições com o intuito de modelar o comportamento de uma distribuição. A simulação de Monte Carlo é frequentemente utilizada para determinar resultados que seriam difíceis, ou até mesmo impossíveis, de serem obtidos por meio de outros meios convencionais de modelagem. Esse método de geração de cenários será utilizado no modelo desenvolvido para a determinação dos tempos até o *default* dos ativos de crédito considerando um horizonte de investimento pré-determinado.

No caso de uma distribuição univariada o processo de geração de cenários é mais simples por ter que considerar apenas o comportamento isolado da variável, entretanto, no caso de distribuições multivariadas, existe o efeito de correlação entre os ativos, ilustrado pela estrutura de dependências, tornando mais complicada a geração de cenários. Romano (ROMANO;2004) propõe um algoritmo para a simulação de variáveis aleatórias utilizando a função de cópula t de Student para descrever a estrutura de dependências das distribuições marginais.

Considerando que uma matriz $n \times n$, A , corresponde ao fator de Cholesky, e uma matriz R corresponde à estrutura de dependência das distribuições marginais dos ativos temos que:

$$R = AA^T$$

Equação 13 - Decomposição de Cholesky de R

Algoritmo de simulação de variáveis aleatórias:

1. Encontrar o fator de Cholesky A da matriz de correlação R , utilizando a decomposição de Cholesky;
2. Simular n variáveis aleatórias independentes, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ a partir de uma distribuição normal com média 0 e variância 1, $N \sim (0,1)$;
3. Simular a variável aleatória s a partir de uma distribuição χ^2_ν com ν graus de liberdade independente da distribuição normal do passo 2;
4. determinar o vetor $y = Az$;
5. Calcular $x = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}} y$;
6. Determinar os componentes $u_i = t_\nu(x_i)$, $i=1, \dots, n$.

Então o vetor resultante $(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ é similar ao vetor de uma cópula t de Student, $(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \sim C_\nu^t$. Em seguida, o vetor resultante será tratado utilizando-se a função de sobrevivência e a *hazard rate* da contraparte correspondente possibilitando a obtenção dos tempos até o *default*.

Cada u_i apresenta um valor dentro do intervalo $[0,1]$ representando a função de probabilidade de *default* $F(t)$. Considerando que h_i é a *hazard rate* e t é o tempo até o *default*, a partir da Equação 10 temos:

$$t = \frac{\ln(u_i - 1)}{h_i}$$

Equação 14 - Função para obtenção do tempo até o *default*

Caso os tempos até o *default* obtidos sejam menores que o horizonte de análise, o ativo será considerado inadimplente, reduzindo seu valor ao seu valor recuperável, taxa de recuperação multiplicada pelo valor atual do ativo, do contrário, ele manterá o valor original.

É importante observar que neste modelo de geração de cenários são consideradas apenas duas possibilidades em relação aos ativos de crédito para a análise do risco, adimplemento ou

inadimplemento da contraparte enquanto que outros modelos contemplam as alterações da classificação de risco da contraparte na análise.

4. Conceitos de medidas de risco

Na gestão de portfólios, a principal preocupação dos gestores é a manutenção do risco assumido pela exposição a diversos tipos de investimentos almejando um retorno mínimo esperado. Ao longo dos anos foram desenvolvidas diversas medidas de quantificação de risco que evoluíram da variância como medida de risco para ativos com distribuição normal para o CVaR, medida de risco frequentemente utilizada na mensuração do risco de perda de ativos de crédito. Neste capítulo serão apresentadas as medidas de risco, variância, VaR e CVaR e suas principais características.

4.1. Variância

A variância é o parâmetro que caracteriza a dispersão das variáveis aleatórias em relação à média de distribuições normais.

Temos que X é a variável aleatória contínua que apresenta a função probabilidade de densidade $p(x)$ e quando conhecemos a média μ de X , temos:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$$

Equação 15 - Variância no caso contínuo

No caso onde X é a variável discreta, e $f(x)$ representa a probabilidade de x . Temos que:

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x)$$

Equação 16 - Variância no caso discreto

A variância é um número positivo que ao representar a dispersão das variáveis aleatórias em relação à média pode ser utilizado como uma medida de risco para distribuições normais.

Apesar da simplicidade e dispersão deste conceito de risco, o seu uso parte da hipótese de que a distribuição sob análise segue uma distribuição normal, fato que nem sempre é verdade. Além disso, a variância apenas indica a dispersão em relação à média, não discriminando se são

variáveis positivas ou negativas. Assim, com o intuito de quantificar o risco de perda propriamente dito desenvolveram-se diversas medidas de risco como o VaR.

4.2. VaR – Value at Risk

Value at Risk é um conceito de risco que busca medir a perda máxima esperada de um portfólio de ativos considerando um nível de confiança e um horizonte de tempo, previamente definidos (HULL;2006). Para Stuchi (STUCHI;2003) o VaR mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e de acordo com um determinado nível de confiança. Já Jorion (JORION, et al 1997 apud STUCHI) define o VaR como um modelo de mensuração de risco que utiliza conceitos estatísticos padrões comumente utilizados em outras áreas técnicas.

Este conceito é uma forma de mensurar quantitativamente o risco baseado no percentil $(1-\alpha)$ da distribuição de retornos de uma variável aleatória X dado um portfólio x e considerando um nível de confiança α .

$$VaR(x, \alpha) = \{X \in R \mid \int_x^{\infty} f(X)dX = \alpha\}$$

Equação 17- VaR de um ativo

x : Composição do portfólio

α : Nível de confiança

X : Variável aleatória

$f(X)$: Função densidade de probabilidade de X

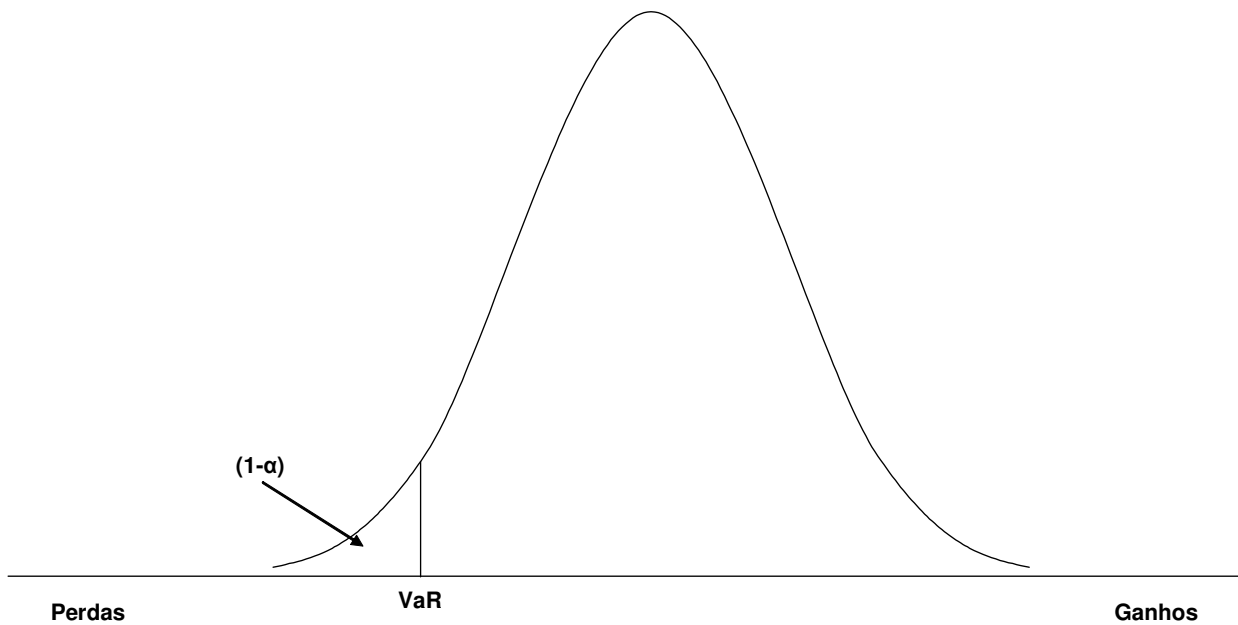


Figura 8- VaR de um ativo dado um nível de confiança X%

Fonte:Hull

Para a mensuração do VaR, Hull (HULL;2006) cita duas abordagens de cálculo freqüentemente utilizadas:

- (i) Método paramétrico: Abordagem onde se adota a hipótese de que o ativo do portfólio assume uma distribuição de probabilidades conhecida. O cálculo do VaR é feito a partir dos parâmetros da distribuição conhecida;
- (ii) Método não-paramétrico: Abordagem onde se adota a hipótese de que o ativo do portfólio não assume qualquer distribuição de probabilidades conhecida. Neste caso o VaR é calculado a partir dos retornos das carteiras que podem ser obtidos a partir de séries históricas passadas ou podem ser gerados a partir da técnica da Simulação de Monte Carlo.

Desde a criação do conceito de VaR diversos esforços foram voltados ao desenvolvimento e implementação de modelos mais sofisticados capazes de modelar de forma mais acurada o risco de um portfólio de ativos. Todavia, a estimação do VaR de um portfólio composto por ativos de crédito tem se mostrado pouco aderente com a realidade exigindo que fossem desenvolvidos modelos específicos de VaR para ativos de crédito.

As justificativas para o desenvolvimento de um modelo de VaR para ativos de crédito são:

- (i) O VaR busca interpretar eventos que ocorrem na cauda inferior de uma distribuição de retornos assumindo que os ativos se comportam de acordo com distribuições estatísticas conhecidas. Entretanto, os ativos de crédito não apresentam comportamento de uma distribuição normal como ocorre com as ações o que resulta na interpretação incorreta de perda máxima dado um nível de confiança α pelo VaR tradicional;
- (ii) Os ativos de crédito apresentam baixa liquidez em comparação a outros ativos negociados, o que resulta em escassez de dados que por sua vez implica na menor precisão e confiabilidade da perda máxima calculada pelo VaR.

Com o intuito de adaptar o uso do conceito de VaR para ativos de crédito, o cálculo do VaR tradicional foi aprimorado pelo uso de informações características destes ativos como a taxa de recuperação em caso de evento de *default*, geralmente fornecida pelas agências de Rating (HULL;2006).

O conceito de VaR tornou-se uma forma de mensurar o risco muito popular pois é um conceito de risco de fácil compreensão que contempla diversas análises em um único valor, entretanto, sabe-se que este conceito não considera a extensão e formato da cauda de perdas o que pode ocasionar o cálculo incorreto do risco de perda em ativos cuja cauda de perdas apresenta comportamento diferente caudas de outras distribuições paramétricas. A partir da Figura 8 e da Figura 9 considerando que o VaR é o mesmo, pode-se verificar que o segundo ativo é muito mais arriscado pois apresenta maior potencial de perdas, fato que não é captado pelo VaR.

Como o VaR mostrou-se uma medida de risco prática, porém incompleta, foi desenvolvida uma nova medida de risco derivada desta, mas capaz de medir a extensão das caudas de perdas para que fosse possível mensurar de forma mais acurada o risco de perdas que será apresentada na próxima seção.

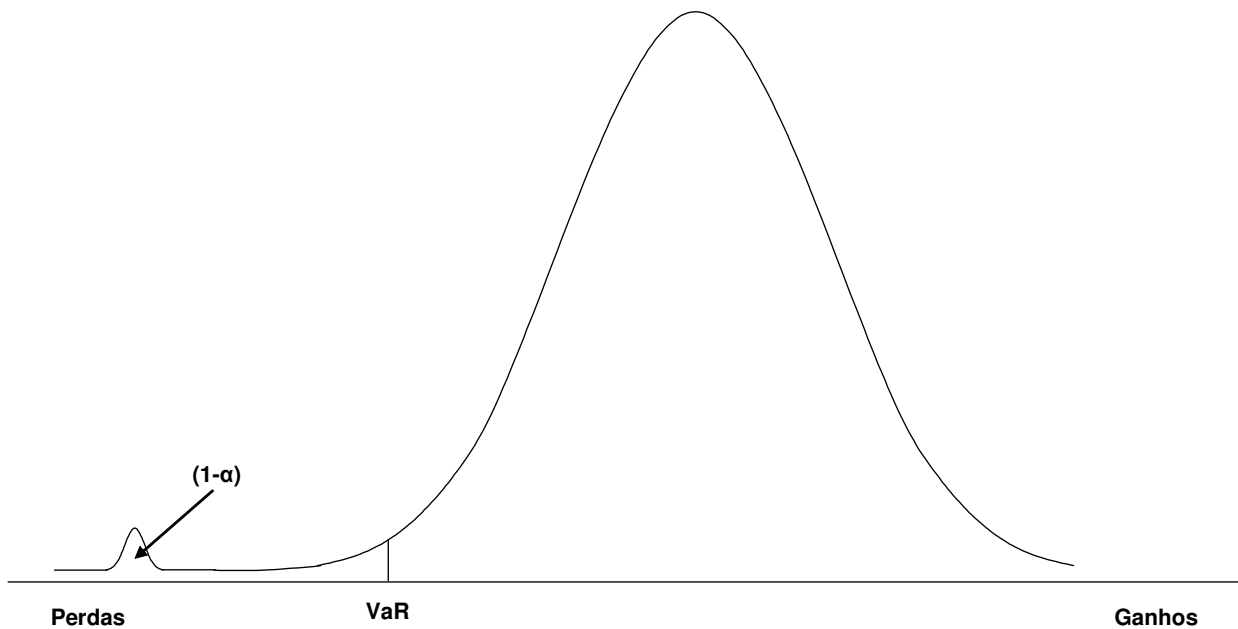


Figura 9 - VaR de um ativo com cauda extensa

Fonte: Hull

4.3. CVaR – Conditional Value at Risk

O conceito de VaR teve grande aceitação, entretanto, algumas de suas características, como por exemplo, a ausência de convexidade que dificulta a sua modelagem (ROCKAFELLER, URYASEV;2000), fizeram com que o seu uso fosse questionado. Além disso, de acordo com Rockafeller e Uryasev, o uso de distribuições paramétricas como a normal, comumente adotada para o cálculo do VaR de um portfólio composto por dois ou mais ativos com distribuições diferentes, como no caso dos ativos de crédito, pode resultar na superestimação ou subestimação da perda máxima reduzindo o benefício obtido com um modelo de quantificação de perdas.

Então, Artzner (ARTZNER et al 1997, apud ROCKAFELLER, URYASEV) e Embrechts (EMBRECHTS et al 1999, apud ROCKAFELLER, URYASEV) propuseram um conceito alternativo de mensuração de risco, o CVaR, VaR condicional, que mensura as perdas de um portfólio que excedem o VaR considerando um portfólio X e um nível de confiança α . O CVaR é uma medida de risco que calcula a média dos valores que excedem o VaR. O CVaR é capaz de mensurar corretamente o risco para ativos com distribuição não paramétrica ao considerar a extensão da cauda de perdas na quantificação do risco de perda. Ele conta com diversas características matemáticas, computacionais e conceituais desejáveis que o torna mais atraente e

fácil de ser utilizado que o VaR (ROCKAFELLER, URYASEV; 2001). Apesar de Pflug (PFLUG et al 2000, apud ROCKAFELLER, URYASEV) ter comprovado que o CVaR é uma medida de risco coerente com melhores propriedades em comparação ao VaR, ela não substituiu conceito de VaR na mensuração de riscos da indústria financeira. No que se refere à estimação do risco de crédito o CVaR se tornou uma referência e passou a ser amplamente utilizado por empresas de seguros, por companhias de investimento, por corretoras e fundos de investimento (ROCKAFELLER, URYASEV; 2001).

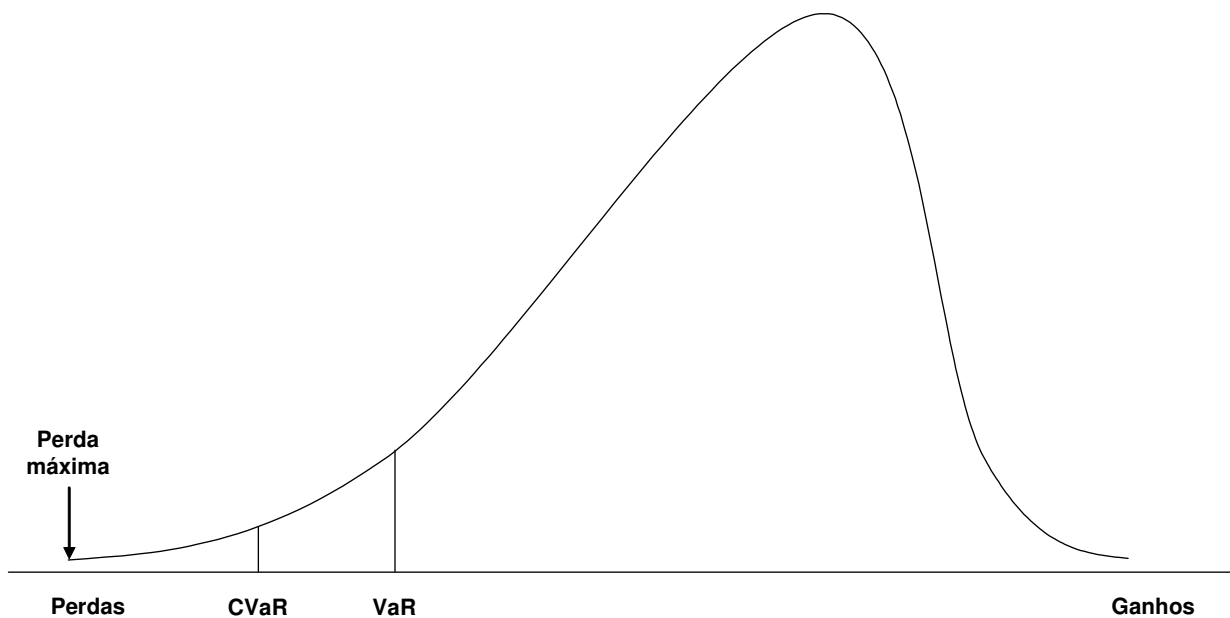


Figura 10 – CvaR de um ativo

Fonte: Uryasev

Assim, CVaR, mostrou-se o conceito de risco mais adequado para a mensuração do risco de ativos de crédito por ser capaz de considerar a extensão das caudas de perdas de distribuições não paramétricas como a de ativos de crédito em sua análise, além de apresentar outras características matemáticas, computacionais e conceituais que possibilitam o controle da extensão da cauda de perdas simultaneamente à quantificação do retorno do ativo/portfólio sob análise.

5. Formulação matemática

Neste capítulo será descrita a formulação matemática do modelo de otimização do CVaR que será utilizado para determinar o portfólio ótimo de ativos de crédito. O principal objetivo deste modelo é auxiliar na decisão de alocação de recursos em ativos de crédito.

Antes de apresentar o modelo proposto, inicialmente será apresentado o modelo de otimização de Markowitz com algumas adaptações para o caso da análise de ativos de crédito. É importante ressaltar que este segundo modelo foi apresentado apenas para fins de comparação com o modelo principal que otimiza o CVaR.

5.1. Modelo de Markowitz modificado

O modelo clássico de Markowitz é apresentado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma_P^2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \sum_i x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n \\ & \sum_i x_i (E(r_i) - R) \geq 0 \end{aligned}$$

onde:

σ_P^2 : variância do portfólio P

x_i : exposição total ao ativo i no caso do portfólio de crédito

R : retorno esperado do portfólio (% a.a.)

$E(r_i)$: retorno esperado do ativo i (% a.a.)

A função objetivo é dada por:

$$\min \sigma_P^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

onde:

σ_P^2 : variância do portfólio P

σ_i : desvio padrão do ativo i

ρ_{ij} : correlação entre o ativo i e o ativo j

No modelo de Markowitz, $E(r_i)$ representa o retorno esperado, neste caso a média, para cada ativo i, enquanto x_i representa o peso do ativo i no portfólio. A restrição $\sum_i x_i = 1$ garante que o portfólio final não ultrapasse o valor unitário. $x_i \geq 0$ garante que não existam posições vendidas no portfólio. Por fim, a equação $\sum_i x_i (E(r_i) - R) \geq 0$ garante que o portfólio tenha um retorno mínimo R .

Neste modelo o desvio padrão de cada ativo i é calculado a partir dos retornos anuais obtidos a partir da série histórica. Visto que o objeto de análise deste trabalho são ativos de crédito cujos retornos esperados em um horizonte de tempo t diferem da média dos retornos de outros tipos de ativos pois são pré-determinados a menos que ocorra um evento de *default*, considera-se que o retorno esperado do ativo i será r_f adicionado ao cs_i , onde r_f é a taxa livre de risco e cs_i é o *spread* de crédito da contraparte i. Além disso, no modelo de Markowitz modificado consideraremos a exposição máxima M a uma única contraparte.

Assim, temos que o modelo de Markowitz adaptado para a análise de ativos de crédito é dado por:

$$\begin{aligned} & \min \sigma_P^2 \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_i x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq M \\ & \sum_i x_i (E(r_i) - R) \geq 0 \end{aligned}$$

onde:

σ_P^2 : variância do portfólio P

M : limite de exposição à um único ativo (% do portfólio)

x_i : exposição total ao ativo i

R : retorno esperado do portfólio (% a.a.)

cs_i : spread de crédito do ativo i (%a.a.)

r_f : taxa livre de risco (% a.a.)

$E(r_i)$: retorno esperado do ativo i, $r_f + cs_i$ (% a.a.)

Neste caso, cada x_i obtido é o peso do ativo i representado como um percentual da exposição total do portfólio. Assim, para obter a exposição absoluta ao ativo i deve-se multiplicar x_i pela exposição máxima, isto é, se a exposição máxima é de 10 mil, se x_i é 0,5 então a exposição ao ativo 1 é de 5 mil.

5.2. Modelo CVaR

O modelo que determina o portfólio com menor risco de perda medido pelo CVaR foi inicialmente proposto por Uryasev e Rockafellar (URYASEV, ROCKAFELLAR;2000).

Considerando um portfólio de i ativos com exposição x e com vetor aleatório $y \in R^m$, a perda do portfólio com exposição x é definida como L_s cuja distribuição depende unicamente de y que apresenta densidade $p(y)$.

A probabilidade de que a função de perda do portfólio $L_s = f(x, y)$ não exceda um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$ é definida como:

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y) \leq \alpha} p(y) dy$$

Equação 18- Função densidade de probabilidade de perdas

De acordo com Uryasev (URYASEV, ROCKAFELLAR;2000), o VaR de um portfólio x dado um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$ define-se como:

$$VaR(x, \alpha) = \min\{\alpha \in R : \Psi(x, \alpha) \geq \alpha\}$$

Equação 19- VaR de um ativo segundo Rockafeller e Uryasev

Já o CVaR no que diz respeito ao mesmo x, dado um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$ define-se como:

$$H = CVaR(x, \alpha) = VaR(x, \alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(x, y) \geq VaR(x, \alpha)} f(x, y) p(y) dy$$

Equação 20- CVaR

A partir da equação acima se observa que o CVaR representa uma perda do portfólio acima da perda estimada pelo VaR.

Rockafeller (ROCKAFELLER, URYASEV; 2000) reescreve a equação do CVaR de um portfólio x discretizando a integral até que fosse possível obter uma aproximação do CVaR passível de minimização pelas técnicas de programação linear existentes e computacionalmente utilizável. É importante observar que Rockafeller adotou a hipótese de que as distribuições sob análise do CVaR se tratavam de distribuições normais para a discretização da equação original do CVaR, entretanto, Romano (ROMANO;2004) não faz distinção no seu uso para a análise dos cenários gerados utilizando-se funções de cópula, que representam os ativos de crédito que não seguem distribuições normais.

Rockafeller propõe a seguinte equação discreta do CVaR:

$$\hat{H} = VaR(x, \alpha) + \frac{1}{s \cdot (1 - \alpha)} \sum_{k=1}^s [f(x, y_k) - VaR(x, \alpha)]^+$$

Equação 21- CVaR em formato discreto

onde:

s: número de cenários gerados

$$[t]^+ = \max\{t; 0\}$$

Assim, o modelo de otimização utilizando o CVaR é dado por:

$$\min \hat{H} = VaR(x, \alpha) + \frac{1}{s \cdot (1 - \alpha)} \sum_{k=1}^s [f(x, y_k) - VaR(x, \alpha)]^+$$

onde:

$$x^T = (x_1, \dots, x_i)$$

s.a.

$$\sum_i x_i = V_{\text{portfólio}}$$

$$0 \leq x_i \leq MV_{\text{portfólio}}$$

$$\sum_i x_i (r_i - R) \geq 0$$

onde:

α : nível de confiança para cálculo do CVaR (%)

s : número de cenários gerados por meio da simulação de Monte Carlo

$V_{\text{portfólio}}$: exposição do portfólio (unidade monetária corrente)

M : limite de exposição à uma única contraparte (% do portfólio)

x_i : exposição total à contraparte i (múltiplo de V)

R : retorno esperado do portfólio (% a.a.)

cs_i : spread de crédito da contraparte i (%a.a.)

r_f : taxa livre de risco (% a.a.)

r_i : retorno esperado da contraparte i , $r_f + cs_i$ (% a.a.)

Neste modelo de minimização do CVaR $\sum_i x_i = V_{\text{portfólio}}$ é a equação de balanço do modelo de otimização que garante que a exposição inicial é a mesma da exposição final. $0 \leq x_i \leq MV_{\text{portfólio}}$ garante que o portfólio não assuma posições vendidas pois somente permite exposições acima de 0, ao mesmo tempo que limita a exposição de cada ativo a M . Por final, $\sum_i x_i (r_i - R) \geq 0$ garante que o portfólio otimizado tenha um retorno mínimo acima do retorno esperado.

Ambos os modelos apresentam equações que garantem a manutenção da exposição inicial, assim como limitações a posições vendidas e limites a posições máximas. O retorno esperado do portfólio, restrição de maior importância dos modelos, é calculado a partir dos retornos de cada um dos ativos de crédito, taxa livre de risco adicionado ao *spread* de crédito da contraparte relacionada ao ativo.

As principais diferenças entre os modelos residem na forma que o risco de perdas a ser minimizado é calculado e no método de otimização dos portfólios. O modelo proposto busca minimizar o CVaR calculado sobre os cenários simulados utilizando um método de otimização linear, enquanto o modelo de Markowitz modificado minimiza a variância do portfólio obtida a partir das combinações das variâncias da série histórica dos retornos dos ativos sob análise utilizando um método de otimização quadrático.

6. Validação do modelo

Neste capítulo será feita a validação do modelo desenvolvido. Inicialmente serão analisados diferentes dados para estimação dos parâmetros da cópula para que seja possível então a geração de cenários de tempos até o *default*, que após tratamento simularão o comportamento dos ativos de crédito. Em seguida, será feita a comparação entre os dois modelos de otimização apresentados no capítulo anterior e por final, serão feitas análises de sensibilidade pela variação das principais variáveis do modelo para melhor compreensão do mesmo.

6.1. Geração de cenários

A escassez de dados é a principal dificuldade observada pelos modelos tradicionais para a mensuração do risco de perda de um portfólio composto por ativos de crédito. Com o intuito de resolver esta questão serão gerados cenários que reproduzem o comportamento da distribuição multivariada do portfólio através do uso da função da cópula t de Student cujos parâmetros serão estimados a partir do procedimento descrito por Mashal e Naldi (MASHAL,NALDI;2002) apresentado no ANEXO A.

Romano (ROMANO;2004) propõe a utilização dos preços de ações líquidas para a estimação dos parâmetros da cópula assumindo que eles apresentam comportamento similar ao dos ativos de crédito. Entretanto, empresas que buscam financiamento por meio de crédito em geral são empresas de capital fechado com acesso restrito aos mercados de capitais e conseqüentemente aos recursos de menor custo. Portanto, é razoável concluir que empresas, inclusive aquelas do agronegócio brasileiro, que obtém financiamento por meio de ativos de crédito não possuem ações negociadas em bolsa ou possuem ações com baixa liquidez, ou seja, elas não dispõem de preços de ações utilizáveis para a estimação dos parâmetros da cópula.

Então, para poder analisar corretamente o risco de crédito destas empresas nesta subseção serão testados diferentes dados para a estimação dos parâmetros da cópula com o intuito de obter uma *Proxy* que possa ser utilizada na geração de cenários de perda dos ativos de crédito do agronegócio brasileiro.

Inicialmente serão feitos testes com empresas com características que satisfaçam as premissas do modelo inicialmente proposto por Romano (ROMANO;2004) para validação das diferentes *Proxies*. Esta abordagem é adotada, pois são poucas empresas do agronegócio que

contam com características como liquidez das ações que satisfaçam todas as premissas do modelo de Romano, podendo interferir na análise.

Neste item serão analisadas 3 empresas brasileiras de capital aberto, não atuantes no setor de agronegócio, que fazem parte do índice Bovespa com os maiores percentuais. A escolha por empresas de grande percentual no Ibovespa se deu pelo fato de estas contarem com ações líquidas e balanços auditados. Os preços de ações deveriam indicar as expectativas de retornos futuros das empresas, ou seja, investidores que se expõem à ação de uma empresa estão indiretamente expostos ao desempenho da mesma. Ações com alta liquidez apresentam estimativas mais próximas do retorno futuro da empresa, por isso, a escolha por empresas de ações líquidas é importante. A existência de balanços auditados garante que a situação econômico-financeira da empresa está corretamente representada em relatórios divulgados periodicamente, permitindo a apuração dos retornos efetivos dos ativos da empresa.

Para a validação de uma *Proxy* ao comportamento dos ativos de crédito serão utilizados 3 grupos de dados para a estimação dos parâmetros da cópula. Os retornos anuais dos preços das ações será o primeiro grupo de dados, utilizado como parâmetro de comparação dos retornos anuais calculados sobre o lucro líquido e do LAJIDA, lucro antes dos juros, impostos, depreciações e amortizações das empresas.

Pelo procedimento de estimação dos parâmetros da cópula obteve-se os seguintes resultados:

Tabela 4 – Estrutura de dependência - Preço da ação

	VALE5	USIM5	UBBR11
VALE5	1.000000	0.439793	-0.266595
USIM5	0.439793	1.000000	0.491919
UBBR11	-0.266595	0.491919	1.000000

Tabela 5 - Estrutura de dependência – Lucro líquido

	VALE5	USIM5	UBBR11
VALE5	1.000000	0.275618	0.621149
USIM5	0.275618	1.000000	-0.010163
UBBR11	0.621149	-0.010163	1.000000

Tabela 6 - Estrutura de dependência – LAJIDA

	VALE5	USIM5	UBBR11
VALE5	1.000000	0.280094	-0.026096
USIM5	0.280094	1.000000	0.347921
UBBR11	-0.026096	0.347921	1.000000

Observa-se que a estrutura de dependência estimada utilizando o LAJIDA é muito semelhante àquela estimada utilizando os preços das ações, porém apresenta menor intensidade de correlação, valores de correlação entre ativos comparativamente mais próximos de 0. Já a estrutura estimada pelo lucro líquido apresenta algumas diferenças em comparação àquela dos preços das ações ao apresentar correlações com sinais opostos para o mesmo par de ativos, como por exemplo a correlação entre VALE5 e UBBR11.

Uma vez obtidos os parâmetros da cópula, foram simulados 5.000 cenários por meio da Simulação de Monte Carlo apresentado anteriormente e foram determinadas as fronteiras eficientes utilizando como medida de risco para otimização dos portfólios o CVaR considerando um nível de confiança de 90% para o horizonte de 1 ano com a exposição total do portfólio de 30 milhões de u.m.c.. Para a determinação dos cenários de tempo até o *default* para a determinação das perdas do portfólio que serão utilizados no cálculo do CVaR serão consideradas as seguintes características das contrapartes:

Tabela 7 – Características das contrapartes

Empresa	VALE5	USIM5	UBBR11
Rating	Aaa	Aa	Baa
Spread	3.04%	4.91%	8.73%
Recovery	53.80%	51.13%	38.52%
Taxa livre de risco			10%

Da Figura 11 é possível observar que as fronteiras eficientes do preço da ação e o LAJIDA são muito próximas se distanciando um pouco à medida que o retorno esperado aumenta. A fronteira eficiente obtida utilizando o lucro líquido das empresas superestima o risco de perdas, se aproximando das demais à medida que o retorno esperado aumenta, mas ainda assim, o risco de

perda estimada é maior que aqueles estimados utilizando o preço das ações e o LAJIDA como dados de entrada.

Assim, é possível afirmar que o lucro líquido é uma *Proxy* insatisfatória do comportamento dos ativos de crédito dado que em todas as comparações com o preço das ações, aquela sempre apresentou diferenças resultando em uma fronteira eficiente que superestima o risco de perda.

Neste caso apresentado podemos concluir que o processo de estimação de cópulas inicialmente proposto por Mashal e Naldi (MASHAL,NALDI;2002) onde os preços das ações eram utilizados por serem uma *Proxy* do comportamento dos ativos de crédito, também pode utilizar o LAJIDA como uma *Proxy* para a geração de cenários. Isto se justifica pelo fato de o preço de uma ação refletir as expectativas de analistas em relação ao potencial de ganho operacional de uma empresa, fato refletido pelo LAJIDA, facilmente calculado a partir de dados obtidos em um balanço patrimonial anual.

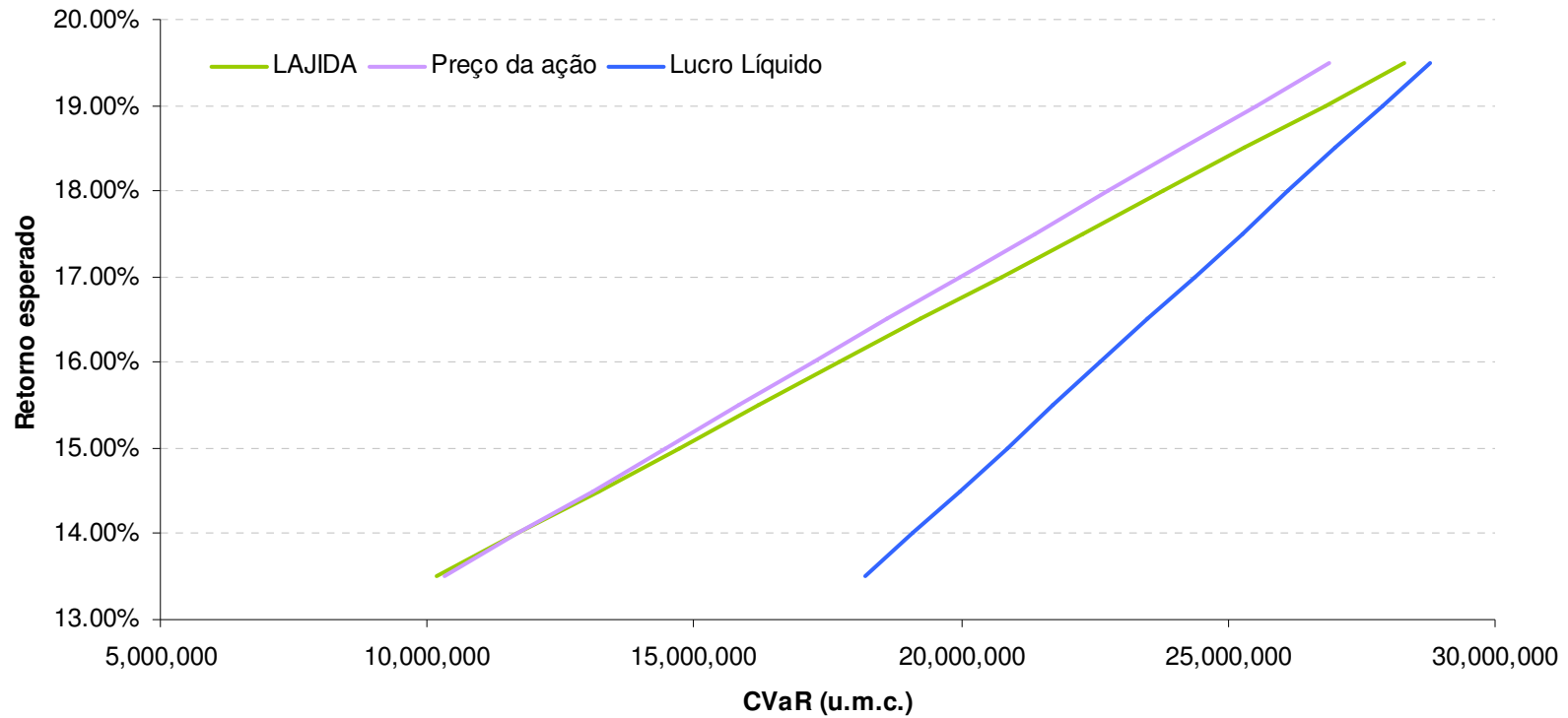


Figura 11 - Fronteiras eficientes

6.2. Comparação dos modelos de otimização

Para a análise e validação do modelo desenvolvido como uma ferramenta que minimiza o risco de perda em um portfólio composto por ativos de crédito será feita a sua comparação com o modelo de Markowitz modificado apresentado previamente. Nesta análise, a perda dos portfólios de ativos de crédito determinado por ambos modelos será mensurada através do CVaR, pois esta medida de risco é a que proporciona a melhor mensuração da perda de ativos de crédito. O principal objetivo desta comparação é verificar se os modelos de variância e do CVaR apresentam resultados significativamente diferentes na composição dos portfólios de ativos de crédito ótimos.

O modelo proposto busca minimizar o CVaR calculado sobre os cenários gerados conforme o procedimento descrito no item anterior utilizando como dados de entrada para estimação dos parâmetros da cópula os preços das ações considerando um nível de confiança de 90% e um horizonte de tempo de 1 ano.

Já o modelo de Markowitz modificado busca minimizar a variância do portfólio calculada sobre os retornos históricos anuais dos preços das ações. Esta abordagem parte do pressuposto de que os retornos anuais seguem distribuições normais com o risco corretamente mensurado pela variância dos retornos. Neste caso, assume-se a hipótese de que o preço das ações é uma *Proxy* do comportamento dos ativos de crédito.

Para esta análise foram escolhidas 10 empresas brasileiras de capital fechado de diferentes setores com maiores percentuais de participação no índice Bovespa não atuantes no agronegócio. A exposição total do portfólio é de 100 milhões de u.m.c..

Uma vez obtidos os portfólios ótimos para ambos modelos para diferentes níveis de retorno, o risco de perda será mensurado para que seja possível construir as fronteiras eficientes de cada modelo. É importante notar que o CVaR e a variância são medidas de risco incomparáveis de forma que é necessário obter uma medida única de risco para que seja possível realizar a comparação dos modelos.

A medida de risco escolhida foi o CVaR, visto que, a literatura indica que esta é a medida que mensura mais corretamente o risco de ativos de crédito. Assim, será feita a geração de 5.000 cenários de tempos até o *default* utilizando a função de cópula t de Student pelo método exposto anteriormente utilizando os preços das ações para estimar os parâmetros da cópula. Então, para cada portfólio ótimo de ambos os modelos será calculado o CVaR com nível de confiança de

90% para o horizonte de 1 ano. Uma vez obtidos o CVaR para cada nível de retorno então são construídas as fronteiras eficientes.

A Tabela 8 apresenta os dados necessários para a geração dos cenários de tempos até o *default* para cálculo do CVaR.

A Tabela 9 apresenta a estrutura de dependência obtida a partir do procedimento de Mashal e Naldi enquanto a Tabela 10 apresenta a estrutura de dependência obtida a partir do cálculo das correlações lineares de Pearson. Pode-se observar que as estruturas de dependências apresentam diferenças significativas para os mesmos pares de ativos.

Da análise das tabelas 11 e 12 pode-se observar que para o mesmo retorno esperado do portfólio, os dois modelos determinaram diferentes alocações entre as contrapartes e resultaram em diferentes valores de perda esperada calculada pelo CVaR.

Pode-se observar na Figura 12 que a fronteira eficiente do modelo de Markowitz modificado encontra-se mais deslocada à direita da fronteira do modelo do CVaR indicando que os portfólios ótimos obtidos a partir daquele em comparação a este apresentam risco de perda mais elevado.

Conclui-se então que os portfólios obtidos a partir do modelo de minimização do CVaR apresentam menores riscos de perdas em comparação aos obtidos pelo modelo de Markowitz modificado o que indica que a abordagem proposta neste trabalho para composição de portfólios de crédito ótimos é consideravelmente mais eficaz que as abordagens tradicionais no que se refere à otimização da relação risco e retorno de ativos de crédito. Isso se dá pelo fato de o CVaR ser capaz de mensurar o risco de perda dos ativos de crédito, que segundo dados empíricos apresentam caudas de perda mais pesadas (ROMANO;2004) e que não são levadas em consideração na análise das medidas de risco tradicionais como variância.

Tabela 8 – Características das contrapartes

Empresa	VALE5	USIM5	UBBR11	PETR4	ITAU4	GGBR4	CSNA3	BBDC4	ITSA4	BBAS3
Setor	Mineração	Mineração	Banco	Petróleo	Banco	Siderurgia	Mineração	Banco	Banco	Banco
Rating	Aaa	Aa	Baa	Ba	A	Aaa	Aa	Aaa	A	Aa
Spread	3.04%	4.91%	8.73%	10.69%	6.80%	3.04%	4.91%	3.04%	6.80%	4.91%
Recovery	53.80%	51.13%	38.52%	38.52%	51.13%	53.80%	51.13%	53.80%	51.13%	51.13%
Taxa livre de risco	10%									

Tabela 9 – Estrutura de dependência – Estimação dos parâmetros da cópula

	VALE5	USIM5	UBBR11	PETR4	ITAU4	GGBR4	CSNA3	BBDC4	ITSA4	BBAS3
VALE5	1.000000	0.464121	0.561289	0.828227	0.614443	0.850354	0.566945	0.387065	0.536558	0.383572
USIM5	0.464121	1.000000	0.714265	0.728956	0.437903	0.708137	0.609569	0.259161	0.606775	0.441651
UBBR11	0.561289	0.714265	1.000000	0.809921	0.798723	0.685669	0.254115	0.467735	0.938740	0.546029
PETR4	0.828227	0.728956	0.809921	1.000000	0.576186	0.855459	0.420319	0.523103	0.685282	0.431704
ITAU4	0.614443	0.437903	0.798723	0.576186	1.000000	0.539058	0.317973	0.306062	0.931359	0.644392
GGBR4	0.850354	0.708137	0.685669	0.855459	0.539058	1.000000	0.539838	0.322113	0.586282	0.236237
CSNA3	0.566945	0.609569	0.254115	0.420319	0.317973	0.539838	1.000000	0.053223	0.247094	0.255965
BBDC4	0.387065	0.259161	0.467735	0.523103	0.306062	0.322113	0.053223	1.000000	0.432762	0.378039
ITSA4	0.536558	0.606775	0.938740	0.685282	0.931359	0.586282	0.247094	0.432762	1.000000	0.694356
BBAS3	0.383572	0.441651	0.546029	0.431704	0.644392	0.236237	0.255965	0.378039	0.694356	1.000000

Tabela 10 – Estrutura de dependência – Correlação linear

	VALE5	USIM5	UBBR11	PETR4	ITAU4	GGBR4	CSNA3	BBDC4	ITSA4	BBAS3
VALE5	1.000000	0.704590	0.729057	0.857296	0.657964	0.925007	0.569108	0.309858	0.648581	0.100077
USIM5	0.704590	1.000000	0.789278	0.776784	0.751823	0.801571	0.732558	0.186221	0.779223	0.548906
UBBR11	0.729057	0.789278	1.000000	0.942660	0.901662	0.762511	0.432532	0.454954	0.963655	0.421460
PETR4	0.857296	0.776784	0.942660	1.000000	0.830948	0.841078	0.407114	0.431655	0.896849	0.385498
ITAU4	0.657964	0.751823	0.901662	0.830948	1.000000	0.740684	0.479502	0.285819	0.943528	0.241948
GGBR4	0.925007	0.801571	0.762511	0.841078	0.740684	1.000000	0.507993	0.157535	0.753377	0.304257
CSNA3	0.569108	0.732558	0.432532	0.407114	0.479502	0.507993	1.000000	0.160568	0.373231	0.106857
BBDC4	0.309858	0.186221	0.454954	0.431655	0.285819	0.157535	0.160568	1.000000	0.380227	0.142420
ITSA4	0.648581	0.779223	0.963655	0.896849	0.943528	0.753377	0.373231	0.380227	1.000000	0.494497
BBAS3	0.100077	0.548906	0.421460	0.385498	0.241948	0.304257	0.106857	0.142420	0.494497	1.000000

Tabela 11 – Resultados do modelo de CVaR

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.50%	42,448,020	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	20.00
14.00%	42,448,020	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	20.00
14.50%	45,150,787	20.00	0.00	5.32	0.00	0.00	20.00	20.00	14.68	0.00	20.00
15.00%	49,206,559	20.00	0.00	13.31	0.00	0.00	20.00	20.00	6.69	0.00	20.00
15.50%	53,305,075	18.03	0.00	20.00	0.00	0.00	20.00	20.00	0.00	1.97	20.00
16.00%	57,623,400	5.94	0.00	20.00	0.00	0.00	20.00	20.00	0.00	14.06	20.00
16.50%	62,034,142	0.00	0.00	20.00	3.02	0.00	16.98	20.00	0.00	20.00	20.00
17.00%	66,534,249	0.00	0.00	20.00	8.96	0.00	11.04	20.00	0.00	20.00	20.00
17.50%	71,034,356	0.00	0.00	20.00	14.90	0.00	5.10	20.00	0.00	20.00	20.00
18.00%	75,579,850	0.00	0.00	20.00	20.00	3.42	0.00	16.58	0.00	20.00	20.00

Tabela 12 – Resultados do modelo de Markowitz

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.50%	51,123,589	20.00	0.00	0.00	0.00	18.85	1.15	20.00	20.00	0.00	20.00
14.00%	51,123,589	20.00	0.00	0.00	0.00	18.85	1.15	20.00	20.00	0.00	20.00
14.50%	51,123,589	20.00	0.00	0.00	0.00	18.85	1.15	20.00	20.00	0.00	20.00
15.00%	51,625,858	19.93	0.00	0.00	0.07	20.00	0.00	20.00	20.00	0.00	20.00
15.50%	56,522,580	13.99	0.00	0.00	6.01	20.00	0.00	20.00	20.00	0.00	20.00
16.00%	61,419,301	8.05	0.00	0.00	11.95	20.00	0.00	20.00	20.00	0.00	20.00
16.50%	66,350,241	3.29	0.00	0.00	19.04	17.67	0.00	20.00	20.00	0.00	20.00
17.00%	71,007,870	0.00	0.00	11.69	20.00	10.12	0.00	20.00	18.19	0.00	20.00
17.50%	75,498,178	0.00	0.00	20.00	20.00	9.63	0.00	20.00	10.37	0.00	20.00
18.00%	79,774,337	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	16.58	0.00	3.42	20.00

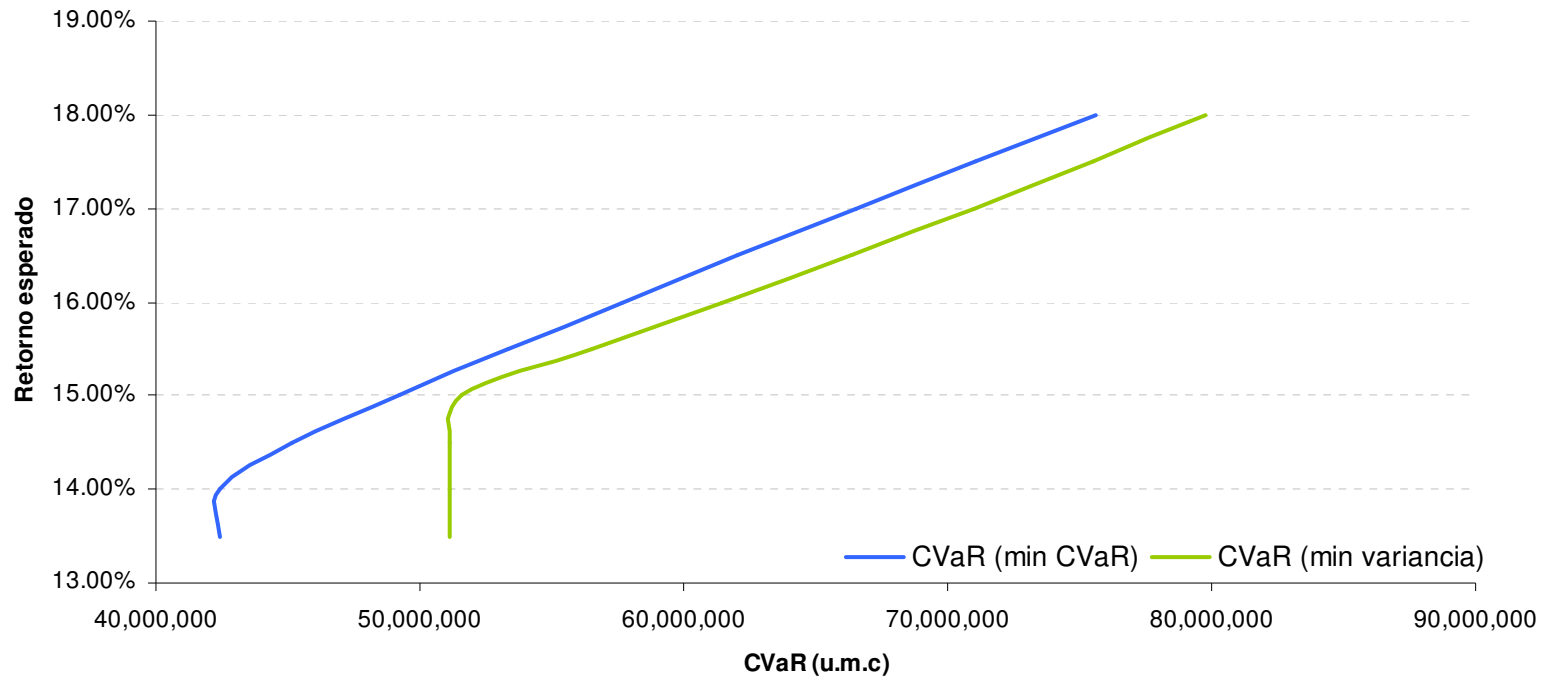


Figura 12 – Fronteiras eficientes do modelo CVaR e do modelo de Markowitz modificado

6.3. Análise de sensibilidade

Nesta subseção serão feitas análises de sensibilidade pela variação dos fatores que podem apresentar influência significativa na determinação do portfólio ótimo. Após a alteração do fator sob análise será definida uma nova fronteira eficiente que indica a melhor composição do portfólio considerando o risco e retorno para auxiliar a análise.

Nível de confiança

A análise de sensibilidade do nível de confiança foi feita assumindo que todas as hipóteses adotadas no item 6.2 são mantidas apenas variando o nível de confiança de 90% para 85%.

Pode-se observar da análise da Tabela 13 em comparação com a Tabela 11 que para um nível de confiança mais baixo o CVaR obtido é menor e que a composição dos portfólios ótimos são diferentes. Na Figura 13 podemos observar que a fronteira eficiente do nível de confiança mais baixo encontra-se deslocada para a esquerda, indicando que o risco para cada nível de retorno esperado é menor.

Tabela 13 – Resultados com nível de confiança 85%

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.50%	29,198,168	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00	0.00	20.00
14.00%	29,198,168	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00	0.00	20.00
14.50%	30,743,754	20.00	3.97	0.00	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00	16.03	20.00
15.00%	33,573,353	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	0.00	19.92	20.00	0.08
15.50%	36,540,349	20.00	0.00	2.15	0.00	20.00	20.00	0.00	0.00	20.00	17.85
16.00%	39,549,245	20.00	0.00	14.05	0.00	20.00	20.00	0.00	0.00	20.00	5.95
16.50%	42,678,453	20.00	0.00	20.00	2.97	20.00	17.03	0.00	0.00	20.00	0.00
17.00%	45,928,168	20.00	0.00	20.00	8.91	20.00	11.09	0.00	0.00	20.00	0.00
17.50%	49,177,882	20.00	0.00	20.00	14.85	20.00	5.15	0.00	0.00	20.00	0.00
18.00%	52,442,605	16.75	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	3.25

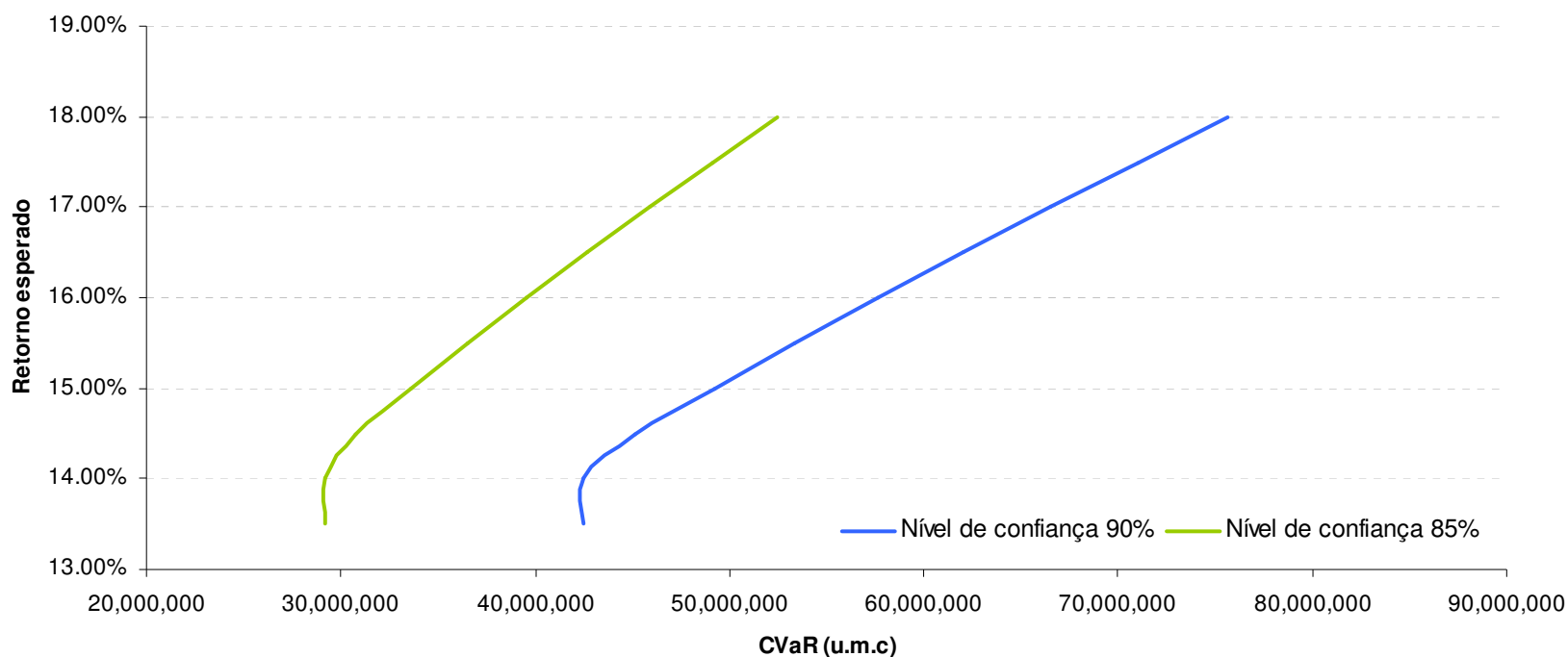


Figura 13 – Fronteira eficiente para diferentes níveis de confiança

Taxa livre de risco

A análise de sensibilidade da taxa livre de risco foi feita assumindo que todas as hipóteses adotadas no item 6.2 são mantidas apenas variando a taxa livre de risco de 10% para 20%.

Pode-se observar da análise da Tabela 14 em comparação com a Tabela 11 que a composição de portfólios ótimos são diferentes para cada retorno esperado. Na Figura 14 pode-se observar que a fronteira eficiente encontra-se deslocada para cima e levemente para a direita indicando que apesar da elevação do retorno esperado, existe um pequeno aumento do risco de perdas. Assim, o aumento da taxa livre de risco, que representa o risco sistêmico, não afeta a quantificação do risco de perdas de forma significativa.

Tabela 14 – Resultados com taxa livre de risco a 20%

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
24.00%	46,336,260	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	20.00
24.50%	46,336,260	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	20.00
25.00%	49,646,250	20.00	0.00	0.00	0.00	0.04	20.00	0.00	20.00	20.00	19.96
25.50%	53,666,166	20.00	0.00	0.00	0.51	20.00	20.00	0.00	19.49	20.00	0.00
26.00%	58,008,471	20.00	0.00	0.00	5.96	20.00	20.00	0.00	14.04	20.00	0.00
26.50%	62,350,776	20.00	0.00	0.00	11.41	20.00	20.00	0.00	8.59	20.00	0.00
27.00%	66,693,081	20.00	0.00	0.00	16.85	20.00	20.00	0.00	3.15	20.00	0.00
27.50%	71,197,676	16.91	0.00	3.09	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00	20.00	0.00
28.00%	75,924,190	9.58	0.00	10.42	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00	20.00	0.00
28.50%	80,650,704	2.26	0.00	17.74	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00	20.00	0.00

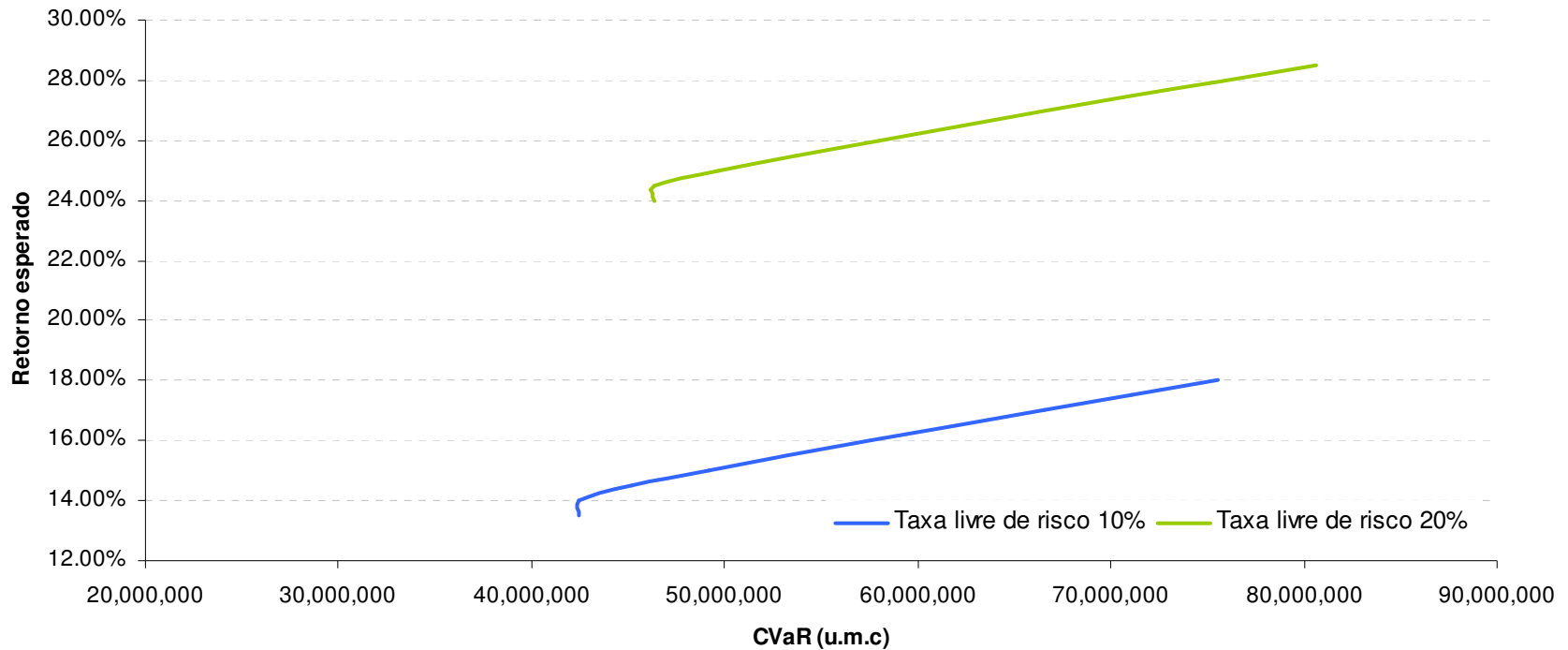


Figura 14 – Fronteira eficiente para diferentes taxas livre de risco

Número de cenários gerados

A análise de sensibilidade do número de cenários gerados foi feita assumindo que todas as hipóteses adotadas no item 6.2 são mantidas apenas variando o número de cenários gerados utilizando a cópula t de Student de 5.000 para 100.

Nesta análise verifica-se que a composição do portfólio ótimo utilizando-se apenas 100 cenários para cada nível de retorno esperado é consideravelmente diferente. Observa-se que para um menor número de cenários gerados a fronteira eficiente encontra-se mais deslocada para direita indicando que a menor quantidade de dados para análise resulta na superestimação do risco de perdas.

Tabela 15 – Resultados com 100 cenários gerados

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.50%	26,619,600	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00
14.00%	26,619,600	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	20.00	0.00	0.00
14.50%	29,416,975	20.00	20.00	0.00	3.96	0.00	20.00	20.00	16.04	0.00	0.00
15.00%	33,614,717	20.00	20.00	0.00	9.90	0.00	20.00	20.00	10.10	0.00	0.00
15.50%	37,812,460	20.00	20.00	0.00	15.84	0.00	20.00	20.00	4.16	0.00	0.00
16.00%	42,385,240	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00	13.68	20.00	0.00	6.32	0.00
16.50%	47,831,444	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00	4.28	20.00	0.00	15.72	0.00
17.00%	53,564,803	14.84	20.00	5.16	20.00	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00	0.00
17.50%	59,455,521	6.85	20.00	13.15	20.00	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00	0.00
18.00%	66,683,161	0.00	16.58	20.00	20.00	3.42	0.00	20.00	0.00	20.00	0.00

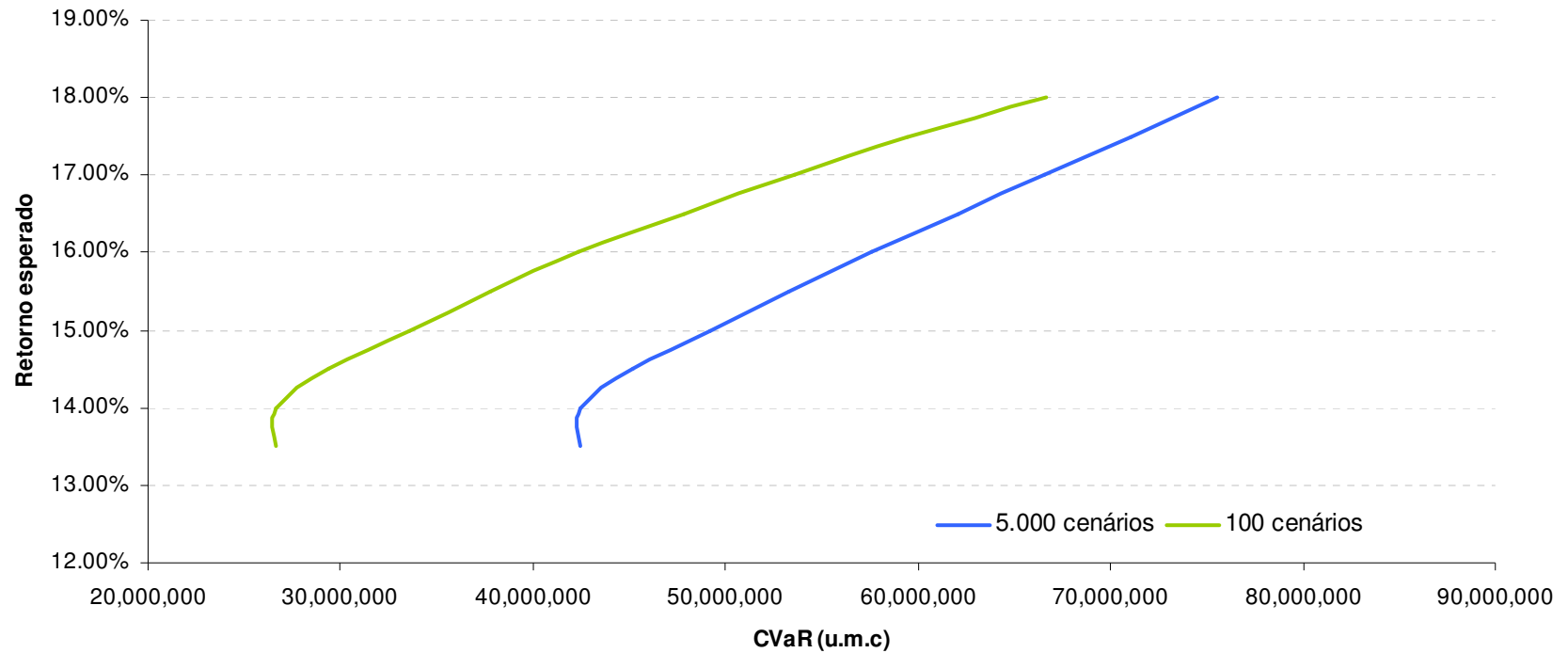


Figura 15 – Fronteira eficiente para diferente número de cenários gerados

Elevação do risco de *default* de um setor específico

A análise de sensibilidade da elevação do risco de *default* de um setor específico foi feita assumindo que todas as hipóteses adotadas no item 6.2 são mantidas apenas variando o rating e *spread* de crédito das contrapartes de um setor específico. Esta análise tem como objetivo observar qual o efeito da elevação do risco de *default* de um único setor.

Nesta análise o risco de *default* do setor bancário será elevado, de forma que estas empresas sob análise tenham classificação de Rating Caa e *spread* de crédito de 12%.

Pode-se observar que a fronteira eficiente da situação com elevação do risco de *default* de um setor específico está deslocada para a direita e para cima indicando que a elevação do risco de *default* de um setor específico altera não somente o perfil de risco do portfólio como também o retorno esperado.

Tabela 16 – Resultados com elevação do risco de *default* de um setor específico

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15.50%	57,753,600	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00	20.00	20.00	0.00	0.00	0.00
16.00%	58,883,096	20.00	20.00	0.00	9.58	0.00	20.00	20.00	0.00	10.42	0.00
16.50%	62,869,716	20.00	15.36	0.00	0.00	4.64	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00
17.00%	66,942,738	20.00	8.95	0.00	0.00	11.05	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00
17.50%	71,015,760	20.00	2.54	0.00	0.00	17.46	20.00	20.00	0.00	20.00	0.00
18.00%	75,117,728	20.00	0.00	0.00	4.75	20.00	20.00	15.25	0.00	20.00	0.00
18.50%	79,238,642	20.00	0.00	0.00	12.62	20.00	20.00	7.38	0.00	20.00	0.00
19.00%	83,388,207	20.00	0.00	0.00	20.00	20.00	19.69	0.00	0.31	20.00	0.00
19.50%	87,977,269	20.00	0.00	0.00	20.00	20.00	14.62	0.00	5.38	20.00	0.00
20.00%	92,566,332	20.00	0.00	0.00	20.00	20.00	9.54	0.00	10.46	20.00	0.00

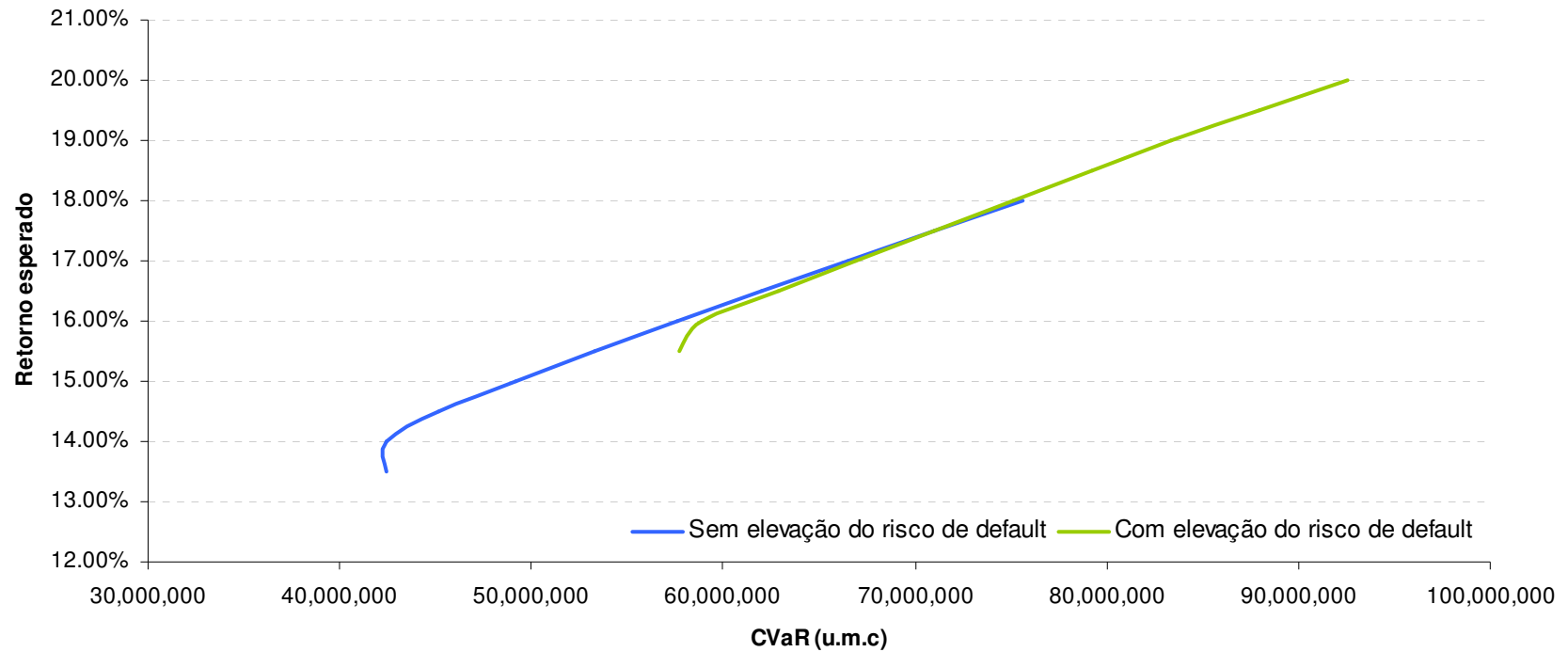


Figura 16 – Fronteira eficiente para cenários com elevação do risco de *default* de um setor específico

7. Portfólio de títulos do agronegócio

Neste último capítulo será feita a aplicação prática do modelo desenvolvido neste trabalho, onde será analisado um portfólio composto por ativos de crédito de empresas do setor do agronegócio. Por questões de sigilo de informação, os nomes das empresas serão omitidos e os seus dados serão modificados, tomando o cuidado para não comprometer a qualidade e veracidade das informações, e por consequência, a análise.

Para esta análise foi considerado um portfólio no valor total de 40 milhões de u.m.c. composto por ativos de crédito do agronegócio, CPRs e CDCAs, emitidos por 4 empresas do setor sucroalcooleiro de capital fechado e de controle familiar. Os dados de entrada do modelo para estimação dos parâmetros da cópula será o LAJIDA, visto que, foi comprovado que esta é a melhor *Proxy* para o comportamento dos ativos de crédito para o caso de empresas que não contam com ações negociadas em bolsa ou que apresentam baixa liquidez, caso que é uma realidade para muitas das empresas do agronegócio inclusive aquelas da análise.

Para o modelo de otimização do portfólio serão gerados 5.000 cenários para a análise do CVaR com um nível de confiança de 90% para o horizonte de 1 ano considerando a concentração máxima à uma única contraparte de 50%.

Temos que:

Tabela 17 – Características das contrapartes

Empresa	EMPRESA 1	EMPRESA 2	EMPRESA 3	EMPRESA 4
Setor	Açúcar e álcool	Açúcar e álcool	Açúcar e álcool	Açúcar e álcool
Rating	A	B	Ca	Baa
Spread	3.66%	7.34%	9.38%	4.50%
Recovery	25.00%	50.00%	20.00%	35.00%

Nesta aplicação do modelo a taxa livre de risco adotada é 13%.

Pelo uso do processo descrito no ANEXO A, utilizando-se retornos anuais dos LAJIDAS desde 2004 a 2007, foi possível obter a seguinte estrutura de dependências:

Tabela 18 – Estrutura de dependência – Estimação dos parâmetros da cópula

	EMPRESA 1	EMPRESA 2	EMPRESA 3	EMPRESA 4
EMPRESA 1	1.000000	-0.833627	-0.402679	-0.302336
EMPRESA 2	-0.833627	1.000000	0.018687	-0.258528
EMPRESA 3	-0.402679	0.018687	1.000000	0.803789
EMPRESA 4	-0.302336	-0.258528	0.803789	1.000000

Neste caso pode-se observar que muitas das correlações são negativas ou muito baixas com exceção daquela entre as empresas 3 e 4. Este fato pode ser explicado pela diferença entre a evolução dos LAJIDAs calculados para cada uma delas, que por sua vez, indica grandes diferenças na capacidade de gestão entre si.

A partir da estrutura de dependência obtida foi aplicada a simulação de Monte Carlo descrita anteriormente, para a geração de 5.000 cenários. Tratando-se as simulações obtidas de forma a obter os tempos até o *default* então é feito um novo tratamento dos dados tal que se o tempo até o *default* for maior que 1 ano, horizonte da análise, o valor do ativo da contraparte *i* é mantido, do contrário, o ativo é considerado inadimplente e o seu valor é multiplicado pela respectiva taxa de recuperação. O gráfico abaixo representa o histograma dos valores dos portfólios obtidos para cada cenário simulado considerando a exposição inicial.

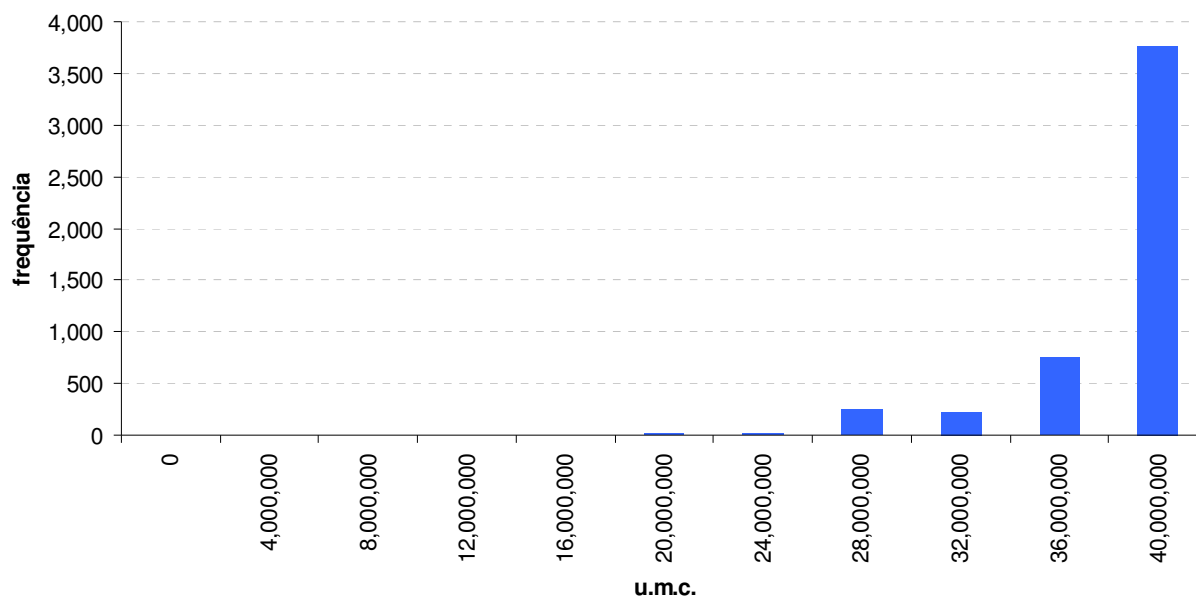


Figura 17 – Histograma dos valores de portfólio simulados

Nota-se que o histograma acima é semelhante à cauda esquerda da Figura 3, onde a perda máxima observada é a situação onde todas as contrapartes se tornaram inadimplentes e o valor do ativo é multiplicado pela taxa de recuperação.

Por final, é aplicado o modelo de otimização de portfólio de modo a se obter a composição ótima, isto é, exposição adequada para cada uma das contrapartes para diferentes retornos esperados.

Tabela 19 – Resultados com dados de empresas do agronegócio

R	CVaR (u.m.c.)	Empresa (milhões u.m.c.)			
		1	2	3	4
17.00%	10,378,000	20.00	0.00	0.00	20.00
17.50%	10,378,000	20.00	0.00	0.00	20.00
18.00%	11,641,812	20.00	0.00	2.83	17.17
18.50%	13,263,747	20.00	0.00	6.45	13.55
19.00%	14,885,683	20.00	0.00	10.08	9.92
19.50%	16,507,618	20.00	0.00	13.71	6.29
20.00%	18,129,553	20.00	0.00	17.33	2.67
20.50%	19,946,684	18.73	1.27	20.00	0.00
21.00%	22,305,765	13.92	6.08	20.00	0.00
21.50%	24,664,845	9.11	10.89	20.00	0.00
22.00%	27,023,926	4.30	15.70	20.00	0.00
Portfólio inicial					
20.03%	19,755,000	10.00	10.00	10.00	10.00

O portfólio inicial representado acima é o portfólio que representa a exposição atual da empresa que concede crédito às 4 contrapartes cujo retorno esperado pelos gestores é 20.03%. Da tabela acima e da figura abaixo podemos observar que a composição do portfólio inicial é muito diferente daquele portfólio para o mesmo nível de retorno esperado o que resulta em um potencial de perdas mais elevado que o necessário. O portfólio inicial apresenta um potencial de perdas no horizonte de 1 ano de 19.755.000 u.m.c. enquanto o portfólio com retorno esperado similar apresenta potencial de perda de 18.129.553 u.m.c., uma redução de 9.00% do potencial de perda. Outra forma de maximizar a relação risco e retorno do portfólio em questão é através da elevação do retorno esperado para o mesmo nível de risco de perda o que resultaria em um retorno esperado entre 20.50% e 21.00% para o risco de perda de 19.755.000 u.m.c., elevação do retorno esperado em 2.35%.

Como a fronteira eficiente indica a melhor relação de risco e retorno, para obter o melhor perfil de risco retorno deve-se rebalancear o portfólio de forma a alinhar o risco e retorno com a

fronteira eficiente. Isso deve ser feito ao elevar o retorno esperado elevando o *spread* de crédito das contrapartes, ou reduzindo o risco de perda.

Pode-se observar que para os retornos mais baixos da fronteira eficiente, o modelo de otimização busca alocar maior peso nas empresas 1 e 4. A medida que busca-se maior retorno esperado, existe a preferência de alocação na empresa 3 em relação à empresa 2 indicando melhor qualidade daquela. Para os retornos mais elevados nota-se que o maior peso é alocado para as empresas 2 e 3 reduzindo a 0 a exposição à empresa 4.

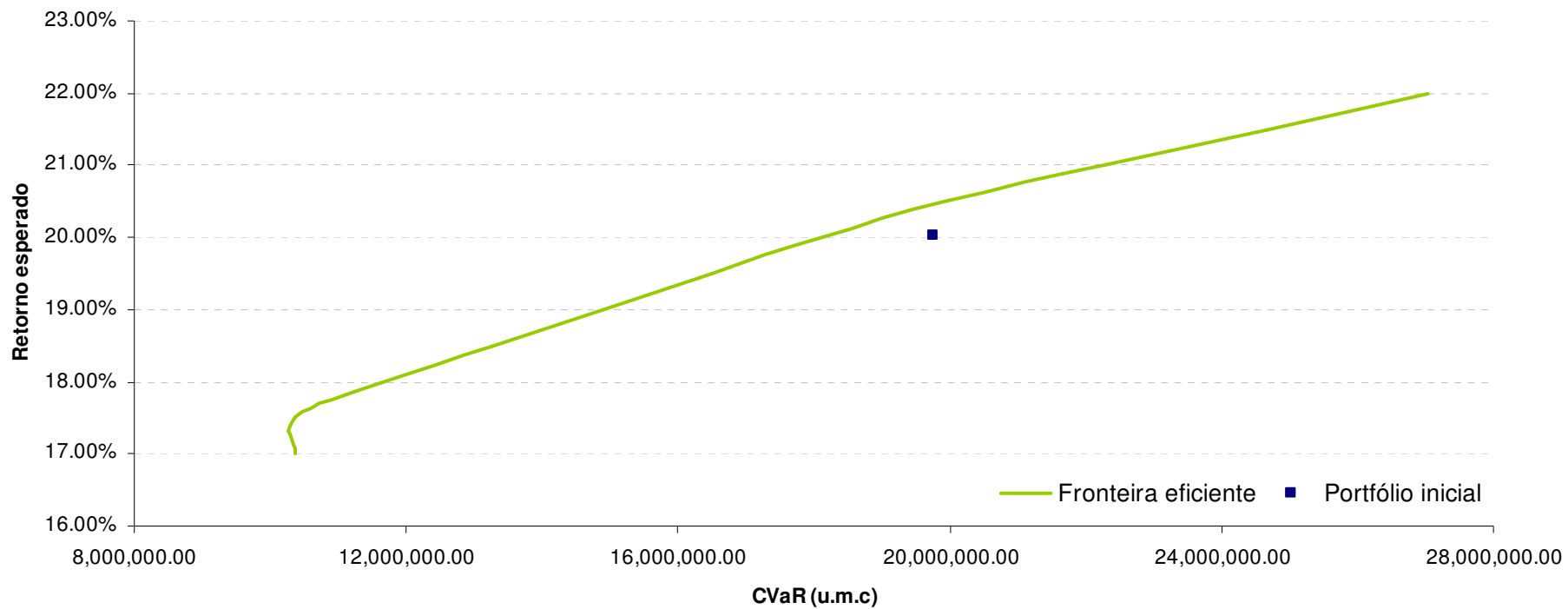


Figura 18 – Fronteira eficiente para aplicação do modelo às empresas do agronegócio

8. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um modelo de otimização de portfólios de ativos de crédito do agronegócio. Como os ativos de crédito apresentam duas características que dificultam a análise de risco, ao longo deste trabalho cada uma delas foi analisada e contornada separadamente para que fosse possível obter um modelo aplicável à realidade brasileira.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados conceitos de pesquisa operacional, de estatística, de finanças e de economia. Os conceitos de finanças e economia foram relevantes para a identificação do problema analisado ao longo deste trabalho, enquanto os conceitos de estatística e pesquisa operacional foram utilizados para o desenvolvimento dos modelos de geração de cenários e do modelo de otimização de portfólios de ativos de crédito.

Inicialmente foi desenvolvido um modelo para geração de cenários que reproduzisse o comportamento de perdas dos ativos de crédito. Para isso adotou-se o conceito de tempo até o *default* para simular eventos de inadimplência. Para resolver a questão da correlação entre os eventos de *default* foi utilizado o conceito de cópula t de Student que relaciona as distribuições univariadas em uma distribuição multivariada. A principal vantagem das cópulas é que não é necessário conhecer a distribuição das marginais para poder simular a multivariada.

A principal contribuição deste trabalho para a geração de cenários foram os diferentes testes e análises realizados com grupos de dados de entrada de forma a se obter uma *Proxy* que substitua o preço da ação utilizado no modelo de geração de cenários proposto por Romano (ROMANO;2004). O teste com outras *proxies* se faz necessário, pois nem todas empresas, inclusive aquelas do agronegócio brasileiro, contam com ações negociáveis em bolsa ou com liquidez adequada permitindo que o seu preço possa ser devidamente utilizado para a geração de cenários de acordo com o modelo de Romano.

Dos testes com dois grupos de dados além dos preços das ações, foi possível verificar que o LAJIDA, calculado a partir de informações facilmente obtidas em um balanço, é a melhor *Proxy*. Esse resultado é coerente, visto que, o preço das ações reflete a expectativa de lucro operacional de uma empresa que é relevante em uma análise de probabilidade de inadimplência e o LAJIDA, é um indicador que reflete os ganhos e perdas operacionais, excluindo-se receitas/despesas de atividades secundárias ou alheias à atividade operacional.

A segunda etapa deste trabalho consistiu no desenvolvimento e validação do modelo de otimização de portfólios pela comparação com o modelo de Markowitz com algumas

modificações. O modelo proposto buscava minimizar o risco calculado através do CVaR, que se trata de uma medida de risco capaz de mensurar corretamente o potencial de perdas de ativos com comportamentos diferenciados como ocorre com ativos de crédito.

Como cada modelo utiliza medidas de risco diferentes e não comparáveis, para cada portfólio obtido em cada um dos modelos para cada nível de retorno esperado foi calculado o CVaR sobre os cenários gerados.

Da comparação foi possível verificar que o modelo de Markowitz apresenta portfólios ótimos consideravelmente diferentes daqueles obtidos com o modelo proposto resultando em um perfil de risco mais elevado para os mesmos retornos esperados. Isto ocorre porque o modelo de Markowitz adota a variância dos retornos como medida de risco, o que conforme apresentado ao longo do trabalho, é uma estimativa adequada para distribuições normais que não é o caso de ativos de crédito que apresentam caudas mais pesadas. Assim, foi possível concluir que o modelo de otimização que utiliza o CVaR como medida de risco a ser minimizada é o mais adequado para portfólios de ativos de crédito.

Após a validação do modelo proposto foram feitas análises de sensibilidade de diversos parâmetros do modelo. Foram realizadas análises com o nível de confiança, a taxa livre de risco, número de cenários e elevação do risco de *default* de um setor específico. Da análise foi possível observar que a variação do nível de confiança, da taxa livre de risco, do número de cenários gerados e elevação do risco de *default* de um setor específico influenciam a composição dos portfólios ótimos, assim como o retorno esperado e o risco de perda representado pelo CVaR.

Por fim, após a validação do modelo foi feita uma aplicação a um caso real envolvendo empresas do setor e os títulos do agronegócio. Nesta aplicação foi considerado um portfólio inicial de uma situação próxima a realidade. Para a geração de cenários foram utilizados os LAJIDAS das empresas do agronegócio.

Como resultado da aplicação foi possível verificar que o portfólio inicial se situava no lado direito da fronteira eficiente indicando que ele não apresentava o melhor perfil de risco e retorno. Então para adequar o perfil do portfólio seria necessário elevar o retorno esperado ou reduzir o risco. Verificou-se que para maiores retornos esperados o modelo passa a alocar maior peso para os ativos com melhor qualidade de forma a reduzir o potencial de perda.

O modelo proposto neste trabalho composto pelos modelos de geração de cenários e o modelo de otimização do CVaR mostrou-se capaz de atender o objetivo de forma satisfatória além de comprovar sua aplicabilidade a um caso real.

O modelo aqui desenvolvido é de grande importância para o setor de crédito agrícola brasileiro, visto que, o mercado de ativos de crédito vem crescendo consideravelmente, e diferentemente do mercado de renda variável cujas medidas de risco evoluíram rapidamente, poucas medidas de risco adequadas ao mercado de crédito foram desenvolvidas. Assim, o modelo proposto seria de grande utilidade para gestores de fundos de investimento, ou bancos que mantêm títulos de crédito do agronegócio em seus respectivos portfólios no intuito de maximizar o retorno e reduzindo o risco de perdas pela exposição a estes ativos, assim como, tornar a concessão de crédito ao setor agrícola uma atividade eficiente. Do ponto de vista dos tomadores do crédito, empresas do agronegócio no caso, seriam beneficiadas pelo uso deste modelo de otimização, visto que, seria possível verificar qual seria o seu risco de crédito em relação às demais empresas.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram feitos estudos e revisões bibliográficas de conceitos relacionados aos ativos de crédito, medidas de risco existentes, setor do agronegócio brasileiro, além de conceitos matemáticos, financeiros, estatísticos e de pesquisa operacional que foram essenciais para o desenvolvimento do modelo proposto, assim como para os testes. Dentre os materiais utilizados pode-se citar livros de autores respeitados pelas suas devidas contribuições nos setores de atuação, artigos científicos recentes contendo as metodologias atuais de quantificação de risco e otimização de portfólios de ativos de crédito.

É importante citar que até o desenvolvimento deste trabalho não se tinha notícia de nenhum modelo brasileiro similar voltado à análise de títulos de crédito de empresas do agronegócio.

8.1. Recomendações para trabalhos futuros

De forma a melhorar o modelo aqui desenvolvido, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Indivisibilidade dos ativos: É importante levar em consideração que os ativos de crédito não são completamente divisíveis, ou seja, se faz necessária a adição de restrições para valores mínimos;

-
- Liquidez dos ativos: O modelo desenvolvido não leva em consideração a liquidez dos ativos de crédito, sendo assim, é importante considerar que o rebalanceamento não pode ser feito livremente e a qualquer momento;
 - Derivativos de crédito: Os derivativos de crédito são instrumentos financeiros que permitem a exposição negativa a um ativo de crédito. Assim, em futuros trabalhos é relevante que os derivativos de crédito sejam considerados permitindo posições vendidas sobre uma contraparte.

9. Referências bibliográficas

ABRÃO, C. H. Agronegócio e títulos rurais. 1ª edição. São Paulo: IOB Thomson, 2006

BRASIL. Lei nº 11.076, de 30 de dezembro de 2004. Dispõe sobre o Certificado de Depósito Agropecuário – CDA, o Warrant Agropecuário – WA, o Certificado de Direitos Creditórios do Agronegócio – CDCA, a Letra de Crédito do Agronegócio – LCA e o Certificado de Recebíveis do Agronegócio – CRA, dá nova redação a dispositivos das Leis nos 9.973, de 29 de maio de 2000, que dispõe sobre o sistema de armazenagem dos produtos agropecuários, 8.427, de 27 de maio de 1992, que dispõe sobre a concessão de subvenção econômica nas operações de crédito rural, 8.929, de 22 de agosto de 1994, que institui a Cédula de Produto Rural – CPR, 9.514, de 20 de novembro de 1997, que dispõe sobre o Sistema de Financiamento Imobiliário e institui a alienação fiduciária de coisa imóvel, e altera a Taxa de Fiscalização de que trata a Lei no 7.940, de 20 de dezembro de 1989, e dá outras providências. D.O.U. Brasília, 31 de dezembro de 2004. 183º da Independência e 116º da República.

CHAIA, A. J. Modelos de gestão do risco de crédito e sua aplicabilidade ao mercado brasileiro. 2005. 90 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005

COSTA NETO, P. L. de O. Estatística. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2002

GUPTON, G. M.; FINGER, C. C.; BHATIA, M. Creditmetrics – Technical document. New York: Risk Metrics Group, 1997 (Documento técnico)

HULL, J. C. Options, futures and other derivatives. 6ª edição. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

LI, D. X. On default correlation: a copula function approach. Journal of fixed income, n.9, p.43-54, 2000.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. Journal of finance, n.7, p.77-91, 1952.

MASHAL, R.; NALDI, M. Extreme events and default baskets. Risk, June, p.119-22, 2002

NELSEN, R. An introduction to copulas. 2ª edição. New York: Springer, 1999.

ROCKAFELLER, R. T.; URYASEV, S. Optimizaton of conditional value-at-risk. The journal of risk, n.2, p.21-41, 2000.

ROMANO, C. Measuring and optimizing portfolio credit risk: a copula based approach: Banca monte dei Paschi di Siena SpA, n.3, p.325-357, 2004.

SECURATO, J. R. Cálculo financeiro das tesourarias. 3ª edição. São Paulo: Saint Paul, 2005

-
- SECURATO, J. R.** Análise e avaliação do risco. 1ª edição. São Paulo: Saint Paul, 2007
- SILVA, G. de S.** Novos instrumentos de financiamento do agronegócio brasileiro e uma análise das alternativas de investimentos para o CDA/WA. 2006. 242 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2006
- SMITH, D.M.; VENABLES, W.N.** An introduction to R. Versão 2.6.2. R development core team, 2006
- SOUZA, J. V. P.** Novas estratégias de financiamento do agronegócio: uma análise sobre a viabilidade de emissão do CDCA pelas cooperativas – SP. 2007. 167 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2007
- STUCHI, L. G.** Quantificação de risco de crédito: uma aplicação do modelo *Creditrisk+* para financiamento de atividades rurais e agroindustriais. 2003. 107 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2003
- WINSTON, W. L.** Introduction to mathematical programming. 2ª edição. California: Wadsworth Publishing Company, 1995
- YAN, J.** Enjoy the joy of copulas. Elsevier Science, 2006. Submetido para análise

ANEXO A – Estimação dos parâmetros da cópula

Para a estimação dos parâmetros ν , graus de liberdade da cópula, e R , matriz de correlações ou estrutura de dependências, assume-se que cada distribuição marginal apresenta distribuições univariadas t de Student conforme o procedimento descrito por Mashal e Naldi (MASHAL,NALDI;2002). Mashal e Naldi utilizaram dados históricos de retornos de ações r_i^j , onde $i=1,\dots,n$ (contrapartes) e $j=1,\dots,N$ (número de observações), assumindo que eles são uma boa *Proxy* do comportamento de ativos de crédito e propuseram o procedimento descrito abaixo:

1. A partir da estimação de máxima verossimilhança, estima-se os graus de liberdade $\hat{\nu}_i$ de cada distribuição marginal. Então, conhecendo estes parâmetros transforma-se o conjunto de dados históricos em uma distribuição uniforme pela equação $\tilde{r}_i^j = t_{\hat{\nu}_i}(r_i^j)$.
2. São feitas repetições variando-se os graus de liberdade da cópula, ν . Para cada ν é obtida uma matriz de correlação \hat{R} .
3. Os graus de liberdade da cópula t de Student são estimados utilizando:

$$\hat{\nu} = \arg \max \sum_{j=1}^N \ln c(\tilde{r}_1^j, \dots, \tilde{r}_n^j; \nu)$$

Equação 22 - Função de máxima verossimilhança para estimação de ν

onde a densidade da cópula é dada pela Equação 6.

Para a estimação do parâmetro R da cópula t de Student segue-se o seguinte procedimento:

- (i) Transformação dos dados para obtenção de marginais com distribuição normal:

$z_i^j = \Phi^{-1}(\tilde{r}_i^j)$, onde Φ é a f.d.p. univariada padronizada normal. Então temos:

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z^j (z^j)^T$$

onde

$$z^j = (z_1^j, \dots, z_n^j)^T$$

- (ii) Transformação dos dados para obtenção das marginais com distribuição t de Student:

$$t_i^j = t_v^{-1}(\tilde{r}_i^j)$$

então temos

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{v+n}{N \cdot v} \sum_{j=1}^N \frac{t^j (t^j)^T}{1 + \frac{1}{v} (t^j)^T \hat{R}_k t^j}$$

onde a matriz transposta de t^j é $(t^j)^T$

$$t^j = (t_1^j, \dots, t_n^j)^T$$

(iii) Rescalonamento para obtenção das diagonais unitárias:

$$(\hat{R}_{k+1})_{i,j} = \frac{(\hat{R}_{k+1})_{i,j}}{\sqrt{(\hat{R}_{k+1})_{i,i} (\hat{R}_{k+1})_{j,j}}}$$

(iv) Repetição dos passos i a iii até a convergência dos resultados.